

Voraussagen über
Topmasse und Neutrinoparameter
in einem E_6 -Massenmodell

Diplomarbeit von
Daniel Wicke

WU D 93-48
November 93

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung	3
2	Das Standardmodell	6
2.1	Die Lagrangedichte	6
2.2	Der Teilcheninhalt	7
2.3	Symmetriebrechung	8
2.4	Fermionmassen	9
2.5	Fermionmischungen	10
2.6	Renormierung	11
2.6.1	Regularisierung	11
2.6.2	Renormierung	12
2.6.3	Skalierung der Masseneinheit	13
2.6.4	Effektive Kopplungskonstanten	14
2.6.5	Physikalische Massen	15
2.7	Experimentelle Daten	15
2.8	Neutrinos	17
3	Grand Unified Theorien	20
3.1	Einfache Erweiterungen des Standardmodells	20
3.1.1	Rechtshändige Neutrinos	20
3.1.2	Zwei Higgs-Doublets	22
3.2	$SU(5)$	22
3.3	$SO(10)$	24
3.4	E_6	25
3.5	Das Pati–Salam-Modell	25
3.6	$SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$	26
3.7	Schwelleneffekte	27
4	Die verwendeten Modelle	29
4.1	Das zugrunde liegende E_6 -Modell	29
4.2	Die Brechungswege des $SO(10)$ -Modells	29
4.2.1	Das Pati–Salam-Modell	30
4.2.2	Das LR-Modell	31
4.3	Die Randbedingungen in Baumnäherung	31
4.4	Die β -Funktionen	34

4.4.1	Standardmodell	36
4.4.2	Pati–Salam-Modell	37
4.4.3	$SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$	38
4.5	Strahlungskorrekturen	38
5	Die numerische Analyse	43
5.1	Das Programm	43
5.2	SMVR: Bis zur intermediären Skala	45
5.2.1	Lösungen des Modells	45
5.2.2	Mischungswinkel des Neutrinosektors	46
5.3	PS: Das strenge Pati–Salam-Modell	55
5.4	PS5: Das variierte Pati–Salam-Modell	55
5.4.1	Lösungen des Modells	56
5.4.2	Mischungswinkel des Neutrinosektors	59
5.4.3	Grenzen für den Parameter a	62
5.5	LR: Das linksrechtssymmetrische Modell	64
6	Zusammenfassung und Ausblick	65
	Literaturverzeichnis	68

Kapitel 1

Einleitung

*Ich möchte wissen,
wie Gott diese Welt geschaffen hat.
Ich bin nicht so sehr an diesem
oder jenem speziellen Phänomen,
dem Spektrum dieses
oder jenes Elementes interessiert.
Ich möchte Seine Gedanken wissen:
Alles andere sind Details.*

Albert Einstein

Die Suche nach einem einheitlichen Bild der Natur ist seit jeher eine der treibenden Kräfte in der Physik.

Die makroskopische Physik kennt drei unterschiedlich gestaltete Kräfte: Elektrizität, Magnetismus und Gravitation. Im 19. Jahrhundert gelang es Maxwell, die Phänomene der Elektrizität mit denen des Magnetismus zu vereinheitlichen, d.h. in einer Theorie zusammenzufassen. Die Gravitation wurde von Einstein (1915) durch die noch heute anerkannte Allgemeine Relativitätstheorie beschrieben, in deren Formalismus sich Maxwells Elektromagnetismus nahtlos einfügt. Die Allgemeine Relativitätstheorie kann daher als umfassende Theorie der makroskopischen Kräfte bezeichnet werden.

Die Untersuchung immer kleinerer Objekte offenbarte die Grenzen dieser klassischen Theorien. Zur Erklärung der Atomphysik wurde die Quantenmechanik entwickelt. Die Untersuchung der Atomkerne brachte mit der schwachen und der starken Wechselwirkung zwei neue Kräfte zum Vorschein.

Die Beschreibung der Wechselwirkungen elementarer Bausteine der Materie erfolgt durch Quantenfeldtheorien (QFT). Die Quantenelektrodynamik (QED) ist der Prototyp solcher Theorien. Sie wurde in den 30er Jahren entwickelt und beschreibt die elektromagnetische Kraft. Das Glashow-Weinberg-Salam-Modell (GWS-Theorie) fügte Ende der 60er Jahre die schwache Kraft hinzu und die QED wurde zu einem Aspekt der elektroschwachen Wechselwirkung. Schließlich konnte Anfang der 70er Jahre auch die starke Wechsel-

wirkung durch eine QFT beschrieben werden: die Quantenchromodynamik (QCD).

Die Verbindung von QCD und GWS-Theorie bildet das Standardmodell der Elementarteilchenphysik. Das Standardmodell ist die heute akzeptierte Theorie zur Beschreibung der elementaren Kräfte der Natur. Es bietet eine einheitliche Beschreibung der elektromagnetischen, der schwachen und der starken Wechselwirkung. Die Einbeziehung der Gravitation ist bisher nicht gelungen.

Obwohl das Standardmodell die Physik der Elementarteilchen hervorragend beschreibt, bleiben viele Fragen offen:

- In der Natur findet man jeweils drei Fermionen, deren Quantenzahlen gleich sind, die sich jedoch in ihrer Masse unterscheiden. Das Standardmodell liefert keine Erklärung für eine solche Familienbildung.
- Die Symmetrie des Standardmodells erlaubt beliebige Hyperladungen. Es gibt daher keinen Grund, warum die elektrischen Ladungen von Quarks und Leptonen zueinander in Beziehung stehen, warum also die Ladung quantisiert ist.
- Das Standardmodell gibt keine Begründung für die Abwesenheit der rechtshändigen Neutrinos und damit für die Masselosigkeit von Neutrinos. Alle übrigen Fermionmassen und mit ihnen die Familienmischungen sind (über die Yukawakopplungen) parametrisch einstellbar und unterliegen keinen theoretischen Einschränkungen. Die drei Eichkopplungen des Modells sind ebenfalls theoretisch nicht eingeschränkte freie Parameter.

Ein erfolgreicher Ansatz zur Beantwortung dieser Fragen sind die Grand Unified Theorien (GUTs). Sie zielen auf ein besseres Verständnis der Eichkopplungen und erklären die Ladungsquantisierung.

In solchen GUTs wird als Symmetriegruppe eine einfache Lie-Gruppe statt eines Produktes mehrerer Lie-Gruppen benutzt. Damit enthält das Modell nur noch eine Wechselwirkung. Die drei bekannten Kräfte entstehen als Folge einer Symmetriebrechung und erweisen sich so als verschiedene Aspekte einer einzigen Kraft. Die Einfachheit der zugrundeliegenden Lie-Gruppe und die Symmetriebrechung bestimmen auch die Hyperladung der Teilchen und erklären so die Ladungsquantisierung.

GUTs liefern keine Erklärung für die Existenz von Familien und deren Massenhierarchie. Es gibt jedoch Beziehungen zwischen Yukawakopplungen, die die möglichen Parameterwerte einschränken und so trotzdem ein besseres Verständnis der beobachteten Fermionmassen ermöglichen.

Die Beziehungen der Yukawakopplungen spiegeln sich in den Fermionmassen nur indirekt wieder. Die Voraussagen von GUTs gelten bei sehr großen Energien. Um diese Aussagen mit den Experimenten bei vielfach niedrigeren

Energien vergleichen zu können, müssen die Renormierungsgruppengleichungen benutzt werden. Die Yukawakopplungen können auch durch Strahlungskorrekturen verändert werden. Schließlich sind ein Großteil der Mischungen und komplexen Phasen der Yukawakopplungen unbeobachtbar, da z.B. die Massen reell gewählt werden können.

Aufgrund dieser Freiheiten gibt es eine große Anzahl von Ansätzen für die Form der Yukawakopplungen. Viele dieser Ansätze sind ad hoc, ohne physikalische Begründung entstanden. Es gibt jedoch auch physikalisch motivierte Ansätze. Diese erlauben weitere Rückschlüsse auf die tieferliegende Theorie und bieten daher einen zusätzlichen Einblick.

In dieser Arbeit soll eine GUT untersucht werden, welche auf der E_6 als Eichsymmetriegruppe beruht. Ziel ist es, in einem physikalisch motivierten Massenmodell unter Berücksichtigung der Renormierungsgruppe, Voraussagen für die Topmasse und für die Parameter im Neutrinosektor zu erhalten.

Kapitel 2

Das Standardmodell

... der Stand der Dinge.

2.1 Die Lagrangedichte

Das Standardmodell (SM) ist eine Quantenfeldtheorie mit lokaler $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ Eichsymmetrie. Genau wie gewöhnliche Feldtheorien lassen sich Quantenfeldtheorien durch die Angabe ihrer Lagrangedichte charakterisieren. Zur Erklärung der Physik werden im SM drei verschiedene Arten von Feldern verwendet: Eich- oder Vektorbosonen, Fermionen und Skalare.

Die Beschreibung der Eichbosonen erfolgt durch Vektorfelder A_μ , die der Skalare durch komplexe Felder ϕ . Fermionen werden durch Weylspinoren, den links- und rechtshändigen Helizitätseigenzuständen $\psi_L = \frac{1}{2}(1 - \gamma_5)\Psi$ und $\psi_R = \frac{1}{2}(1 + \gamma_5)\Psi$, repräsentiert.

Unter Verwendung der Summenkonvention läßt sich die Lagrangedichte darstellen als:

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^A + i\bar{\psi}_\alpha \not{D}\psi_\alpha + (D_\mu\phi^a)(D_\mu\phi^a) + y_{\alpha\beta}^a \psi_\alpha \psi_\beta \phi^a + V(\phi) + (\text{Geist- und Eichsterme}) \quad (2.1)$$

Große lateinische Buchstaben indizieren die Eichbosonen, kleine lateinische Buchstaben die Skalare. Griechische Buchstaben α, β numerieren die Fermionen. μ und ν sind Dirac-Indizes.

Die Feldstärketensoren der Eichbosonen sind durch

$$F_{\mu\nu}^A = \partial_\mu A_\nu^A - \partial_\nu A_\mu^A - gC_{ABC}A_\mu^B A_\nu^C \quad (2.2)$$

definiert. Dabei sind C_{ABC} die Strukturkonstanten der Eichgruppe. Aus der Forderung nach lokaler Eichinvarianz ergibt sich die kovariante Ableitung:

$$D_\mu = \partial_\mu - i\frac{g_{(B)}}{2} t^B A_\mu^B \quad . \quad (2.3)$$

Dabei bezeichnet $g_{(B)}$ die zum Eichboson A^B gehörige Kopplung (g, g' oder g_s). t^B sind die Generatoren der Eichsymmetrie in der Darstellung, die die gleiche Dimension hat wie die Teilchendarstellung, auf die D_μ wirkt.

2.2 Der Teilcheninhalt

Jeder der Weylspinoren ψ_α des SMs wird entsprechend seinem Wechselwirkungsverhalten in eine fundamentale Darstellung der Eichsymmetriegruppe eingeordnet. Die Quarks, die in drei Farben auftreten, bilden jeweils eine dreidimensionale Darstellung der $SU(3)$. Alle linkshändigen Spinoren werden in $SU(2)$ -Doublets eingeordnet, während die rechtshändigen in $SU(2)$ -Singlets auftauchen (Tabelle 2.1). Die vorhandenen Darstellungen werden dreimal wiederholt, so da drei Familien von Fermionen entstehen, wie sie im Experiment beobachtet werden [19].

Die fundamentalen Darstellungen von nicht-abelschen Lie-Gruppen werden durch ihre Dimension bezeichnet. Doublets bilden eine **2**, Triplets eine **3** usw. Die zu einer Darstellung komplex konjugierte Darstellung wird durch einen Querstrich gekennzeichnet (z.B. $\bar{\mathbf{3}}$). Um die Darstellung eines Teilchens im SM zu bezeichnen, werden die $SU(3)$ -, die $SU(2)$ -Darstellung und die Hyperladung Y benötigt. Die beiden ersten werden in Klammern geschrieben, an die Y als Index gesetzt wird.

	Quarks			Leptonen	
	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{\frac{2}{3}}$	$(\mathbf{3}, \mathbf{1})_{-\frac{1}{3}}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}$	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_{-1}$
1. Familie	$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L$	u_R	d_R	$\begin{pmatrix} \nu_e \\ e \end{pmatrix}_L$	e_R
2. Familie	$\begin{pmatrix} c \\ s \end{pmatrix}_L$	c_R	s_R	$\begin{pmatrix} \nu_\mu \\ \mu \end{pmatrix}_L$	μ_R
3. Familie	$\begin{pmatrix} t \\ b \end{pmatrix}_L$	t_R	b_R	$\begin{pmatrix} \nu_\tau \\ \tau \end{pmatrix}_L$	τ_R

Tabelle 2.1: Die Fermionen und ihre Darstellungen im SM

Die Eichbosonen des SM leben in den adjungierten Darstellungen (Tabelle 2.2). Die Kopplungsstärke der $SU(3)$ wird mit g_s bezeichnet. Die Kopplung der $SU(2)$ wird mit g oder g_2 , die der $U(1)$ mit g' oder g_1 bezeichnet. Die Kopplungen g_1 und g_2 werden häufig bei der Konstruktion von GUTs benutzt, da sie der in GUTs notwendigen Normierung entsprechen.

Symbol	Darstellung	Kopplungsstärke
g	$(\mathbf{8}, \mathbf{1})_0$	g_s
(W^1, W^2, W^3)	$(\mathbf{1}, \mathbf{3})_0$	$g = g_2$
B	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$	$g' = \sqrt{\frac{3}{5}}g_1$

Tabelle 2.2: Die Eichbosonen im SM

Statt durch ihre Dimension kann eine Darstellung auch durch den Eigenwert ihres quadratischen Casimiroperators $C^2 := t^B t^B$ charakterisiert werden. (t^B sind wieder die Generatoren der Eichgruppe in der betreffenden Darstellung.) Dies ist besonders in der $SU(2)$ blich, wo die Darstellungen durch den Isospin I unterschieden werden. Isospin und Casimiroperator sind durch $C^2 = 2I(I + 1)$ verbunden (Tab. 2.3).

Gruppe	Darstellung	C^2	I
$SU(2)$	1	0	0
	2	3/2	1/2
	3	4	1

Tabelle 2.3: Eigenwerte des Casimiroperators der $SU(2)$ nach Slansky [49] (siehe auch Tab. 4.5)

Die Komponenten einer Darstellung lassen sich durch den Eigenwert bezüglich des \hat{I}_3 -Operators unterscheiden. $\hat{I}_3 := t_{SU(2)}^3$ ist ein Generator der $SU(2)$ in der betrachteten Darstellung. Dieser kann die Eigenwerte $I_3 = -I, -I + 1, \dots, I$ annehmen. Die Doubletts in Tab. 2.1 sind so geschrieben, da die obere Komponente $I_3 = +\frac{1}{2}$ und die untere Komponente $I_3 = -\frac{1}{2}$ besitzt. Mit I_3 und der Hyperladung Y lt sich die elektrische Ladung der Teilchen ausdrcken:

$$Q = I_3 + Y \quad . \quad (2.4)$$

2.3 Symmetriebrechung

Die Symmetrie des SM ist in der Natur gebrochen. Diese Brechung wird in der Theorie durch den Higgs-Mechanismus realisiert. Dazu wird ein (komplexes) skalares Doublett Φ mit der Darstellung $(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}$ eingeführt, dessen $I_3 = -\frac{1}{2}$ -Komponente man einen Vakuumerwartungswert zuordnet:

$$\Phi = \begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \langle \Phi \rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ \langle \phi_2 \rangle \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

Indem die komplexen Felder um den Vakuumerwartungswert des Potentials entwickelt werden, erhält man zunächst vier reelle Skalare. Durch umdefinieren der Eichfelder der Theorie ist es jedoch möglich, drei dieser Skalare zu entfernen. Dabei ergibt sich eine Theorie mit einem massiven reellen Skalar (dem Higgs-Boson), drei massiven Eichbosonen W^+, Z, W^- und einem masselosen Eichboson A , dem Photon:

$$W^\pm = \frac{1}{\sqrt{2}}(W^1 \pm iW^2) \quad (2.6)$$

$$Z = \frac{g'B - gW^3}{\sqrt{g'^2 + g^2}} = \sin \theta_W B - \cos \theta_W W^3 \quad (2.7)$$

$$A = \frac{gB + g'W^3}{\sqrt{g'^2 + g^2}} = \cos \theta_W B + \sin \theta_W W^3 \quad (2.8)$$

Der Weinbergwinkel θ_W ist durch das Verhältnis der Kopplungsstärken definiert:

$$\tan(\theta_W) = \frac{g'}{g} \quad (2.9)$$

Die so umgeschriebene Theorie ist eine $SU(3) \times U(1)$ -invariante Eichtheorie. Die Quantenzahl der $U(1)$ ist die elektrische Ladung Q . Entfernt man aus dieser Theorie die schweren Eichbosonen und das Higgs-Boson, so ergeben sich die Theorien der starken und der elektromagnetischen Wechselwirkung (QCD und QED).

2.4 Fermionmassen

Es ist im SM nicht möglich eichinvariante Massenterme für Fermionen zu bilden, da die linkshändigen Teilchen $SU(2)$ -Doublets, die rechtshändigen Teilchen aber Singletts sind. Stattdessen werden eichinvariante Yukawaterme benutzt, das heißt Kopplungen zwischen zwei Fermionen und einem skalaren Teilchen. Für die Eichinvarianz wird eine $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ -Darstellung benötigt. Massenterme entstehen, wenn der Skalar einen Vakuumerwartungswert hat.

Fermionmassen entstehen im SM durch Kopplung der Fermionen an den Vakuumerwartungswert des skalaren Doublets Φ , das schon für die Symmetriebrechung verantwortlich ist.

Für die erste Familie sind zunächst folgende Yukawaterme möglich:

$$y_{dd} \overline{(u, d)}_L \Phi d_R + \text{h.c.} \quad (2.10)$$

$$y_{ee} \overline{(\nu_e, e)}_L \Phi e_R + \text{h.c.} \quad (2.11)$$

h.c. bezeichnet das hermitesch Konjugierte des vorangehenden Terms. Wird nun, wie oben beschrieben, der $I_3 = -\frac{1}{2}$ -Komponente, also ϕ_2 , zur Symmetriebrechung ein Vakuumerwartungswert zugeordnet, so ergeben sich die Massenterme:

$$y_{dd} \overline{d}_L \langle \phi_2 \rangle d_R + \text{h.c.} = m_d \overline{d}_L d_R + \text{h.c.} \quad (2.12)$$

$$y_{ee} \overline{e}_L \langle \phi_2 \rangle e_R + \text{h.c.} = m_e \overline{e}_L e_R + \text{h.c.} \quad (2.13)$$

Kopplungen an u_R sind auf diese Art nicht möglich, da wegen der Hyperladung die Eichsymmetrie verletzt würde. Um auch dem u -Quark im SM eine Masse geben zu können, wird der Umstand genutzt, da in der $SU(2)$ die $\mathbf{2}$ äquivalent zur komplex konjugierten Darstellung $\overline{\mathbf{2}}$ ist. Das heißt, man kann aus dem komplex konjugierten Feld Φ^* einen Ausdruck konstruieren, der sich wieder wie eine $\mathbf{2}$ transformiert:

$$\tilde{\Phi} = i\sigma^2 \Phi^* \quad (2.14)$$

σ^2 bezeichnet die zweite Pauli-Matrix. Da die Hyperladung dieses Ausdrucks $-\frac{1}{2}$ ist, ergibt sich folgender zusätzlicher Yukawaterm:

$$y_{uu} \overline{(u, d)_L} \tilde{\Phi} u_R + \text{h.c.} \quad (2.15)$$

In diesem Ausdruck koppelt der Vakuumerwartungswert gerade die beiden u -Quarks:

$$-y_{uu} \overline{u_L} \langle \phi_2^* \rangle u_R + \text{h.c.} = m_u \overline{u_L} u_R + \text{h.c.} \quad (2.16)$$

2.5 Fermionmischungen

Bei mehreren Familien können Yukawaterme Fermionen aus verschiedenen Familien verbinden. Solche Mischungen sind jeweils zwischen den Leptonen, zwischen den d -artigen Quarks (d, s, b) und zwischen den u -artigen Quarks (u, c, t) möglich. Die Yukawakopplungen können somit als 3×3 -Matrizen im Raum der Familien dargestellt werden:

$$U = \begin{pmatrix} y_{uu} & y_{uc} & y_{ut} \\ y_{cu} & y_{cc} & y_{ct} \\ y_{tu} & y_{tc} & y_{tt} \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} y_{dd} & y_{ds} & y_{db} \\ y_{sd} & y_{ss} & y_{sb} \\ y_{bd} & y_{bs} & y_{bb} \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} y_{ee} & y_{e\mu} & y_{e\tau} \\ y_{\mu e} & y_{\mu\mu} & y_{\mu\tau} \\ y_{\tau e} & y_{\tau\mu} & y_{\tau\tau} \end{pmatrix} \quad (2.17)$$

Ebenso schreibt man die entstehenden Massenterme durch Matrizen im Familienraum:

$$M_U = -\langle \phi_2^* \rangle U, \quad M_D = \langle \phi_2 \rangle D, \quad M_E = \langle \phi_2 \rangle E. \quad (2.18)$$

Die Matrizen M_U, M_D, M_L sind im allgemeinen beliebige komplexe Matrizen. Diese Massenmatrizen können diagonalisiert werden, indem eine Transformation

$$M_i \longrightarrow M_i^{diag} = V_L^{i+} M_i V_R^i, \quad i = U, D, E \quad (2.19)$$

mit unitären Matrizen V_L^i und V_R^i durchgeführt wird. M_i^{diag} kann dabei reell gewählt werden. Indem man die Felder umdefiniert, gelangt man zu den Masseeigenzuständen der Fermionen:

$$\begin{pmatrix} u^m \\ c^m \\ t^m \end{pmatrix}_L = V_L^U \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_L \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} u^m \\ c^m \\ t^m \end{pmatrix}_R = V_R^U \begin{pmatrix} u \\ c \\ t \end{pmatrix}_R \quad (2.20)$$

Analoge Gleichungen gelten für die d -artigen Quarks und die Leptonen.

Im SM kann nur die Kombination $V_{CKM} = V_L^{D+} V_L^U$ beobachtet werden. Sie taucht im geladenen Strom der schwachen Wechselwirkung auf:

$$J_W^\mu = \overline{(e^m, \mu^m, \tau^m)} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) \begin{pmatrix} \nu_e^m \\ \nu_\mu^m \\ \nu_\tau^m \end{pmatrix} + \overline{(d^m, s^m, b^m)} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{CKM} \begin{pmatrix} u^m \\ c^m \\ t^m \end{pmatrix} \quad (2.21)$$

Dabei ist V_L^E in den masselosen Neutrinos absorbiert worden:

$$\begin{pmatrix} \nu_e^m \\ \nu_\mu^m \\ \nu_\tau^m \end{pmatrix} = V_L^{E+} \begin{pmatrix} \nu_e \\ \nu_\mu \\ \nu_\tau \end{pmatrix} \quad (2.22)$$

Die Matrix V_{CKM} heißt Cabbibo–Kobayashi–Maskawa-Matrix. Die CKM-Matrix wird durch drei Mischungswinkel θ_{ij} und eine komplexe Phase δ ausgedrückt [45]:

$$V_{CKM} = \begin{pmatrix} c_{12}c_{13} & s_{12}c_{13} & s_{13}e^{-i\delta} \\ -s_{12}c_{23} - c_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{12}c_{23} - s_{12}s_{23}s_{13}e^{i\delta} & s_{23}c_{13} \\ s_{12}s_{23} - c_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & -c_{12}s_{23} - s_{12}c_{23}s_{13}e^{i\delta} & c_{23}c_{13} \end{pmatrix} \quad (2.23)$$

mit $c_{ij} := \cos(\theta_{ij})$ und $s_{ij} := \sin(\theta_{ij})$, $ij = 12, 13, 23$.

2.6 Renormierung

Bei der Quantisierung von Feldtheorien treten divergente Integrale auf, die zu unendlichen n -Punkt-Vertexfunktionen in der Störungstheorie und damit zu unendlichen Streuamplituden führen. Die Aufgabe der Renormierung ist es, die unendlichen durch endliche Vertexfunktionen zu ersetzen. Dabei wird in zwei Schritten vorgegangen:

1. **Regularisierung.** Bei der Regularisierung werden die unendlichen Integrale durch Ausdrücke ersetzt, die von einem neuen Parameter (dem Regularisierungsparameter) abhängen und für einen bestimmten Grenzwert die ursprüngliche *Form* der Integrale annehmen.
2. **Renormierung.** Zur Renormierung werden die so gewonnenen Ausdrücke zunächst in Anteile, die im Grenzwert divergieren und solche, die endlich bleiben, zerlegt. Dann werden die neuen (renormierten) n -Punktfunktionen durch die endlichen Anteile der alten Funktion definiert.

Schließlich wird eine neue Lagrangedichte konstruiert, die diese neuen Vertexfunktionen erzeugt.

2.6.1 Regularisierung

Es gibt mehrere verschiedene Regularisierungsvorschriften. Bei der „Cut-Off“-Regularisierung werden die Schleifen-Integrationen statt über alle Impulse (d. h. von $-\infty$ bis ∞) nur bis zu einem festgelegten Impulsbetrag Λ , dem Abschneideparameter, durchgeführt. Die divergenten Integrale werden dadurch zu Funktionen von Λ mit einem Pol für $\Lambda \rightarrow \infty$.

Bei der dimensional Regularisierung werden die Schleifen-Integrationen statt bei d^4p bei $d^{2\omega}p$ mit $\omega \in \mathcal{C}$ durchgeführt. Dadurch wird ω als neuer

Parameter eingeführt. Die unendlichen Integrale können nun als Funktionen in der komplexen ω -Ebene mit Pol an der Stelle $\omega = 2$ aufgefasst werden. Diese Funktionen sind die regularisierten Vertexfunktionen. Die Integration bei $2\omega \in \mathcal{C}$ Dimensionen ist durch analytische Fortsetzung der Integration bei $d \in \mathbb{N}$ Dimensionen definiert. Genauere Ausführungen hierzu finden sich in [35, 48].

Um die dimensionale Regularisierung korrekt formulieren zu können, muss man eine Massenskala μ einführen. Der zusätzliche Parameter dient dazu, die Massendimension der Ausdrücke so zu korrigieren, daß die Wirkung dimensionslos bleibt.

2.6.2 Renormierung

Ich gehe im folgenden von dimensionaler Regularisierung aus. Die auftretenden Formeln werden der Einfachheit halber für eine skalare ϕ^4 -Theorie mit der Kopplungskonstanten λ und der Masse m geschrieben.

Die regularisierten Vertexfunktionen $\Gamma_r^{(n)}$ hängen von den Parametern μ und $\varepsilon := 2 - \omega$ ab. Die Entwicklung der Vertexfunktionen in eine Laurent-Reihe um $\varepsilon = 0$ erlaubt eine Trennung in einen endlichen und einen in ε divergenten Anteil. Man schreibt die Lagrangedichte nun durch Einfügen von divergenten Termen so um, daß sich die Divergenzen in den Feynman-Integralen aufheben.

Es zeigt sich, daß es möglich ist, die Lagrangedichte multiplikativ zu renormieren, d.h. durch Substitution der Parameter in der Lagrangedichte gemäß

$$m^2 \longrightarrow m_0^2 := Z_m m^2 \quad \lambda \longrightarrow \lambda_0 := Z_\lambda \lambda \quad \phi \longrightarrow \phi_0 := Z_\phi^{1/2} \phi \quad (2.24)$$

endliche Vertexfunktionen zu erreichen.

Die Z sind Funktionen der Regularisierungsparameter ε und μ . Die neuen Parameter hängen also von ε und μ ab. Die neue Wirkung S_0 ergibt sich aus der alten S , indem die Gren m , λ , ϕ durch neue (nackte) Gren m_0 , λ_0 , ϕ_0 ersetzt werden.

Die n -Teilchenamplituden $\phi_0^n \Gamma_0^{(n)}(p; m_0, \lambda_0)$ können durch die alten Parameter ausgedrückt werden:

$$\phi_0^n \Gamma_0^{(n)}(p; m_0, \lambda_0) = \phi^n \underbrace{Z_\phi^{n/2} \Gamma_0^{(n)}(p; Z_m^{1/2} m, Z_\lambda \lambda)}_{=: \Gamma^{(n)}(p; m, \lambda, \mu, \varepsilon)} \quad (2.25)$$

Damit ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen den Vertexfunktionen:

$$\Gamma_0^{(n)}(p; m_0, \lambda_0) = Z_\phi^{-n/2} \underbrace{\Gamma^{(n)}(p; m, \lambda, \mu, \varepsilon)}_{\text{endlich für } \varepsilon \rightarrow 0} \quad (2.26)$$

Betrachtet man die nackten Gren als die unabhängigen Gren und die renormierten als Funktionen von diesen, so ist die linke Seite unabhängig von μ . Anwendung von $\mu \frac{d}{d\mu}$ ergibt also:

$$\left[\mu \frac{\partial}{\partial \mu} + \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial \lambda} + \mu \frac{\partial m}{\partial \mu} \frac{\partial}{\partial m} - \frac{n}{2} \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \mu} \right] \Gamma^{(n)} = 0 \quad (2.27)$$

Man definiert:

$$\beta\left(\lambda, \frac{m}{\mu}, \varepsilon\right) := \mu \frac{\partial \lambda}{\partial \mu} \quad (2.28)$$

$$\gamma_d\left(\lambda, \frac{m}{\mu}, \varepsilon\right) := \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln Z_\phi}{\partial \mu} \quad (2.29)$$

$$\gamma_m\left(\lambda, \frac{m}{\mu}, \varepsilon\right) := \frac{1}{2} \mu \frac{\partial \ln m^2}{\partial \mu} \quad (2.30)$$

$$\Leftrightarrow m \gamma_m\left(\lambda, \frac{m}{\mu}, \varepsilon\right) = \mu \frac{\partial m}{\partial \mu}$$

Diese Koeffizienten sind analytisch für $\varepsilon \rightarrow 0$. Außerdem sind sie dimensionslos, d.h. sie hngen — wie angegeben — nur von $\frac{m}{\mu}$ ab. Die Renormierungsgruppengleichung (2.27) beschreibt die Abhngigkeit der Greensfunktionen $\Gamma^{(n)}$ vom Regularisierungsparameter μ .

2.6.3 Skalierung der Masseneinheit

Betrachten wir das Verhalten der Greensfunktionen bei Skalierung der Masseneinheit. Es darf keinen Unterschied in den physikalischen Gren machen, wenn eine Masseneinheit durch eine neue ersetzt wird. D. h.: $\Gamma^{(n)}(p; m, \lambda, \mu)$ skaliert mit s^d unter der Transformation $p \rightarrow sp$, $m \rightarrow sm$, $\mu \rightarrow s\mu$, wobei d die Massendimension von $\Gamma^{(n)}$ ist:

$$\Gamma^{(n)}(sp; sm, \lambda, s\mu) = s^d \Gamma^{(n)}(p; m, \lambda, \mu) \quad (2.31)$$

$\Gamma^{(n)}$ ist also in p , m , μ homogen vom Grad d . Nach dem Satz von Euler gilt also:

$$\left(s \frac{\partial}{\partial s} + m \frac{\partial}{\partial m} + \mu \frac{\partial}{\partial \mu} \right) \Gamma^{(n)} = d \Gamma^{(n)} \quad (2.32)$$

Subtrahiert man (2.32) von (2.27), so erlhlt man:

$$\left(-s \frac{\partial}{\partial s} + m(\gamma_m - 1) \frac{\partial}{\partial m} + \beta \frac{\partial}{\partial \lambda} - n\gamma_d + d \right) \Gamma^{(n)}(sp; m, \lambda, \mu) = 0 \quad (2.33)$$

Diese Gleichung beschreibt das Verhalten der Vertexfunktionen, wenn man die ueren Impulse mit einem Faktor s hochskaliert. Naiv wrde man erwarten, da die Skalierung der Impulse durch eine Skalierung der massenbehafteten physikalischen Gren ausgeglichen werden kann und da

$$\left(-s \frac{\partial}{\partial s} - m \frac{\partial}{\partial m} + d \right) \Gamma^{(n)}(sp; m, \lambda, \mu) = 0$$

gilt. Der Einflu der Wechselwirkung(en) ergibt jedoch nicht-verschwindende Koeffizienten β , γ_m und γ_d , und damit nicht-naives Skalenverhalten.

2.6.4 Effektive (oder gleitende) Kopplungskonstanten

Die Gleichung (2.33) kann gelöst werden, indem Funktionen $f(s)$, $m(s)$, $\lambda(s)$ definiert werden, so da gilt:

$$\Gamma^{(n)}(sp; m, \lambda, \mu) = f(s)\Gamma^{(n)}(p; m(s), \lambda(s), \mu) \quad (2.34)$$

Damit kann man Rechnungen für große Impulse durchführen, ohne zusätzliche Schleifen-Diagramme für die Berechnung der n -Punkt-Vertexfunktionen berücksichtigen zu müssen. Die Funktionen $m(s)$, $\lambda(s)$ werden die effektive (oder gleitende) Masse, bzw. Kopplung genannt. Differenzieren nach s ergibt:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial s} \Gamma^{(n)}(sp; m, \lambda, \mu) \\ &= \left[\frac{df}{ds} + f(s) \left(\frac{\partial m}{\partial s} \frac{\partial}{\partial m} + \frac{\partial \lambda}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \right] \Gamma^{(n)}(p; m(s), \lambda(s), \mu) \quad , \quad (2.35) \end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned} & s \frac{\partial}{\partial s} \Gamma^{(n)}(sp; m, \lambda, \mu) \\ &= \left(s \frac{df}{ds} + f(s) s \frac{\partial m}{\partial s} \frac{\partial}{\partial m} + f(s) s \frac{\partial \lambda}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \Gamma^{(n)}(p; m(s), \lambda(s), \mu) \\ &= \left(s \frac{df}{ds} + f(s) s \frac{\partial m}{\partial s} \frac{\partial}{\partial m} + f(s) s \frac{\partial \lambda}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \frac{1}{f(s)} \Gamma^{(n)}(sp; m, \lambda, \mu) \\ \Rightarrow 0 &= \left(-s \frac{\partial}{\partial s} + \frac{s}{f(s)} \frac{df}{ds} + s \frac{\partial m}{\partial s} \frac{\partial}{\partial m} + s \frac{\partial \lambda}{\partial s} \frac{\partial}{\partial \lambda} \right) \Gamma^{(n)}(sp; m, \lambda, \mu) \quad (2.36) \end{aligned}$$

Vergleicht man (2.33) mit (2.36), so ergibt sich durch Koeffizientenvergleich¹:

$$s \frac{\partial m}{\partial s} = m(\gamma_m - 1) \quad (2.37)$$

$$s \frac{\partial \lambda}{\partial s} = \beta \quad (2.38)$$

$$\frac{s}{f(s)} \frac{df}{ds} = d - n\gamma_d \quad (2.39)$$

(2.37) und (2.38) bestimmen das Skalenverhalten der Kopplung und der Masse als Funktionen des Skalierungsparameters s . Die Lösung von (2.39) ist:

$$f(s) = s^d \exp \left[-n \int_0^s ds' \frac{\gamma_d(\lambda(s'))}{s'} \right]$$

γ_d wird als anomale Dimension bezeichnet.

¹Die Gleichungen sollen für alle $\Gamma^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$ gelten.

2.6.5 Physikalische Massen

Im Verlauf der Renormierung wurden mehrere Größen eingeführt, die die Rolle einer Masse spielen: Die nackte Masse m_0 , die renormierte Masse m und die effektive Masse $m(s)$. Daraus ergibt sich die Frage, wie diese Massenparameter mit der experimentell zugänglichen Polmasse M zusammenhängen. Die Polmasse ist definiert als die Energie, bei der der Propagator des betrachteten Teilchens einen Pol besitzt.

Der Zusammenhang zwischen der Polmasse und den Massenparametern der Theorie ergibt sich aus der Betrachtung des Propagators unter Berücksichtigung der Selbstenergie-Beiträge:

$$\Gamma^{(2)}(p; m(\mu), \lambda(\mu), \mu) = \frac{1}{p^2 - m^2(\mu) + \Sigma(p, \mu)}, \quad (2.40)$$

mit

$$\Sigma(p, \mu) = m^2(\mu)A(p^2, \mu) + (p^2 - m^2(\mu))B(p^2, \mu). \quad (2.41)$$

Der Propagator $\Gamma^{(2)}$ besitzt an der Stelle

$$M^2 = m^2(\mu_p) \left(1 + \frac{A(p, \mu)}{1 - B(p, \mu)} \right) \quad \text{mit} \quad \mu_p = m(\mu_p) \quad (2.42)$$

einen Pol. Da der Propagatorpol in Streuamplituden zu Resonanzen bei M führt, wird M auch als die physikalische Masse bezeichnet. Aus der Störungstheorie ergibt sich

$$M = m(\mu_p) \left(1 + \frac{4}{3\pi} \alpha_s(\mu_p) + \mathcal{O}(\alpha_s^2) \right) . \quad (2.43)$$

Ausführliche Behandlungen der verschiedenen Massendefinitionen finden sich in [26, 29].

2.7 Experimentelle Daten

Die Werte für die Fermionmassen und die Kopplungsstärken werden in einer Vielzahl von Experimenten untersucht. Die hier genannten Zahlen bilden eine Art weltweites Mittel, welches die Ergebnisse der unterschiedlichen Experimente zusammenfaßt. Die Werte für die Eichkopplungen stammen aus [7].

$$\begin{aligned} g_1(91 \text{ GeV}) &= 0.4619 \pm 0.00245 \\ g_2(91 \text{ GeV}) &= 0.6502 \pm 0.00387 \\ g_3(91 \text{ GeV}) &= 1.19 \pm 0.042 \end{aligned} \quad (2.44)$$

Die Werte für die starke Kopplung werden laufend verbessert. Deshpande, Keith und Pal [21] benutzen

$$g_3(91 \text{ GeV}) = 1.23 \pm 0.072 \quad . \quad (2.45)$$

Dieser Wert wird in den folgenden Rechnungen verwendet.

Die Quarkmassen und ihre Fehler wurden in [7] zusammengetragen. Dort finden die experimentellen Ergebnisse sowohl für Polmassen, als auch für effektive Massen $m(\mu)$. Da ich im weiteren Verlauf immer mit den effektiven Massen gerechnet habe, schreibe ich hier nur diese auf:

$$\begin{aligned} m_u(1 \text{ GeV}) &= 5.2 \pm 0.5 \quad \text{MeV} \\ m_d(1 \text{ GeV}) &= 9.2 \pm 0.5 \quad \text{MeV} \\ m_c(1 \text{ GeV}) &= 1.41 \pm 0.6 \quad \text{GeV} \\ m_s(1 \text{ GeV}) &= 194 \pm 4 \quad \text{MeV} \\ m_b(1 \text{ GeV}) &= 6.33 \pm 0.06 \quad \text{GeV} \end{aligned} \quad (2.46)$$

Das t -Quark konnte bisher nicht direkt beobachtet werden. Die Bestimmung seiner Masse erfolgt deshalb über die Auswertung von Schleifendiagrammen zu denen das Top beiträgt:

$$M_t = 150_{-24}^{+19+15} \text{ GeV} \quad (2.47)$$

Der erste Fehler stammt von den experimentellen Unsicherheiten, der zweite von der Higgsmasse. Die modellunabhängige untere Grenze für die Topmasse ist

$$M_t > 113 \text{ GeV} \quad . \quad (2.48)$$

Wie erwähnt fließt die Higgsmasse in solche Rechnungen ein und liefert einen entscheidenden Beitrag zu den Fehlern. Auch das Higgs-Boson konnte bisher nicht direkt nachgewiesen werden. Die experimentell bestimmte untere Schranke für seine Masse liegt bei

$$M_H > 60 \text{ GeV} \quad . \quad (2.49)$$

Die obere Grenze von $M_H < 1 \text{ TeV}$ ergibt sich aus Unitaritätsüberlegungen. Zu den experimentellen Werten von Top- und Higgsmasse sei auf [6] und darin enthaltene Referenzen verwiesen.

Die physikalischen Massen der geladenen Leptonen sind wohlbekannt. Auch für diese benutze ich im weiteren die effektiven Massen [7]:

$$\begin{aligned} m_e(1 \text{ GeV}) &= 0.4960 \quad \text{MeV} \\ m_\mu(1 \text{ GeV}) &= 104.57 \quad \text{MeV} \\ m_\tau(1 \text{ GeV}) &= 1.7835 \quad \text{GeV} \quad . \end{aligned} \quad (2.50)$$

Die Massen aus (2.46) und (2.50) wurden mit Hilfe der Renormierungsgruppengleichungen zur Skala von $M_Z = 91 \text{ GeV}$ entwickelt. Dabei wurden die QED-Anteile der β -Funktionen mit 1-Schleifen-Genauigkeit, die QCD-Anteile mit 3-Schleifen-Genauigkeit berücksichtigt [30]. Die effektiven Fermionmassen fr 1 GeV und 91 GeV sind in Tabelle 2.4 zusammengestellt. Die angegebenen Massen der Leptonen sind auf alle angegebenen Stellen genau.

Die experimentellen Werte für die Einträge der CKM-Matrix werden ebenfalls in [7] aufgeführt. Auch die CKM-Matrix läuft mit der Skala. Der Effekt ist jedoch so klein, daß man ihn vernachlässigen kann.

Partikel	$m(1 \text{ GeV})$	$m(91 \text{ GeV})$
u	$5.2 \pm 0.5 \text{ MeV}$	$2.8 \pm 0.4 \text{ MeV}$
d	$9.2 \pm 0.5 \text{ MeV}$	$5.05 \pm 0.4 \text{ MeV}$
c	$1.41 \pm 0.6 \text{ GeV}$	$0.769 \pm 0.6 \text{ GeV}$
s	$194 \pm 4 \text{ MeV}$	$103 \pm 1 \text{ MeV}$
b	$6.33 \pm 0.06 \text{ GeV}$	$3.47 \pm 0.01 \text{ GeV}$
e	0.4960 MeV	0.488 MeV
μ	104.57 MeV	103 MeV
τ	1.7835 GeV	1.75 GeV

Tabelle 2.4: Die experimentell bestimmten effektiven Massen der Fermionen fr verschiedenen Energien.

$$\begin{aligned}
|V_{CKM}| &= \begin{pmatrix} |V_{ud}| & |V_{us}| & |V_{ub}| \\ |V_{cd}| & |V_{cs}| & |V_{cb}| \\ |V_{td}| & |V_{ts}| & |V_{tb}| \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.9747 - 0.9759 & 0.218 - 0.224 & 0.001 - 0.007 \\ 0.218 - 0.224 & 0.9734 - 0.9752 & 0.030 - 0.058 \\ 0.003 - 0.019 & 0.029 - 0.058 & 0.9983 - 0.9996 \end{pmatrix} \quad (2.51)
\end{aligned}$$

2.8 Neutrinos

Im Standardmodell der Elementarteilchenphysik sind die Neutrinos masselos. Dieses Bild ist mit den Beschleunigerexperimenten in Einklang. Bisher hat man Neutrinos nur mit linkshändiger Helizität und Antineutrinos nur mit rechtshändiger Helizität beobachtet. Die klassische Methode zur Messung der Neutrinomassen ist die Untersuchung des Spektrums im Proze



Die oberen Grenzen für die Neutrinomassen aus solchen direkten Beobachtungen sind jedoch sehr schwach [14]:

$$\begin{aligned}
m_{\nu_e} &< 7.2 \text{ eV} \\
m_{\nu_\mu} &< 270 \text{ keV} \\
m_{\nu_\tau} &< 31 \text{ MeV}
\end{aligned} \quad (2.53)$$

Aus kosmologischen Überlegungen ergibt sich eine wesentlich stärkere Grenze, indem man theoretische Vorhersagen über die Zahl der Neutrinos im Universum mit der maximalen Energiedichte des Universums verbindet:

$$m_{\nu_e} + m_{\nu_\mu} + m_{\nu_\tau} < 40 \text{ eV} \quad (2.54)$$

Zur Festlegung dieser Grenze wird das Standardmodell benutzt. Erweiterungen des SM können deshalb dieses Resultat verändern.

Neben den Hinweisen auf masselose Neutrinos gibt es Experimente, welche gegenüber den theoretischen Überlegungen Neutrinodefizite aufweisen, die sich durch Neutrinomischungen und damit durch massive Neutrinos erklären lassen. In diesen Experimenten werden zwei verschiedene Neutrinodefizite beobachtet: das Sonnenneutrinodefizit und das Defizit atmosphärischer Neutrinos.

Sonnenneutrinos werden von den Experimenten Homestake, Kamiokande, GALLEX und SAGE beobachtet. Alle vier Experimente beobachten ein Defizit an Elektronneutrinos im Vergleich zu den Vorhersagen des Standardsonnenmodells. Das Defizit kann durch den Mikheyev-Smirnov-Wolfenstein (MSW) Mechanismus erklärt werden. Dieser Mechanismus beschreibt den Resonanzbergang von Neutrinos in Materie. Das Fehlen der Neutrinos wird also auf die Umwandlung eines Teils der erwarteten Elektronneutrinos in ein ν_μ , ν_τ oder ein noch unbekanntes „steriles“ Neutrino ν_s zurückgeführt [14].

Die Reduzierung des Neutrinoflusses durch den MSW-Mechanismus ist vom Mischungswinkel und der Differenz der Massenquadrate der beteiligten Neutrinos abhängig. Die zur Erklärung der Experimente benötigten Parameterbereiche wurden in [33, 34] zusammengestellt (Abb. 2.1).

Atmosphärische Neutrinos entstehen in der oberen Atmosphäre hauptsächlich bei Pionzerfällen durch den anschließenden Myonzerfall. Diese Myon-neutrinos werden in drei Experimenten untersucht: Kamiokande, IMB und Soudan. Auch hier werden weniger Neutrinos beobachtet, als theoretisch vorhergesagt. Um das atmosphärische Neutrinodefizit durch Neutrinomischungen erklären zu können, muß der Mischungswinkel bei $\sin^2(2\theta_{\mu i}) \simeq 0.5$ und die Differenz der Massenquadrate $\Delta m_{\mu i}^2$ ($i = e, \tau, s$) zwischen 0.0005 eV^2 und 0.5 eV^2 liegen [17].

Auch für kosmologische Überlegungen sind massive Neutrinos interessant. Die inflationären Urknall-Modelle fordern ein flaches Universum. Die bisher beobachtete Materiedichte des Universums ist jedoch viel zu klein für ein solches Szenario. Es gibt daher viele Versuche, eine bisher unbeobachtbare „dunkle“ Materie aufzuspüren, um dieses Defizit zu erklären. Einen entscheidenden Beitrag zur dunklen Materie können auch massive Neutrinos liefern. Das im Augenblick von Kosmologen favorisierte Modell fordert für das τ -Neutrino eine Masse zwischen 5 und 7 eV [46].

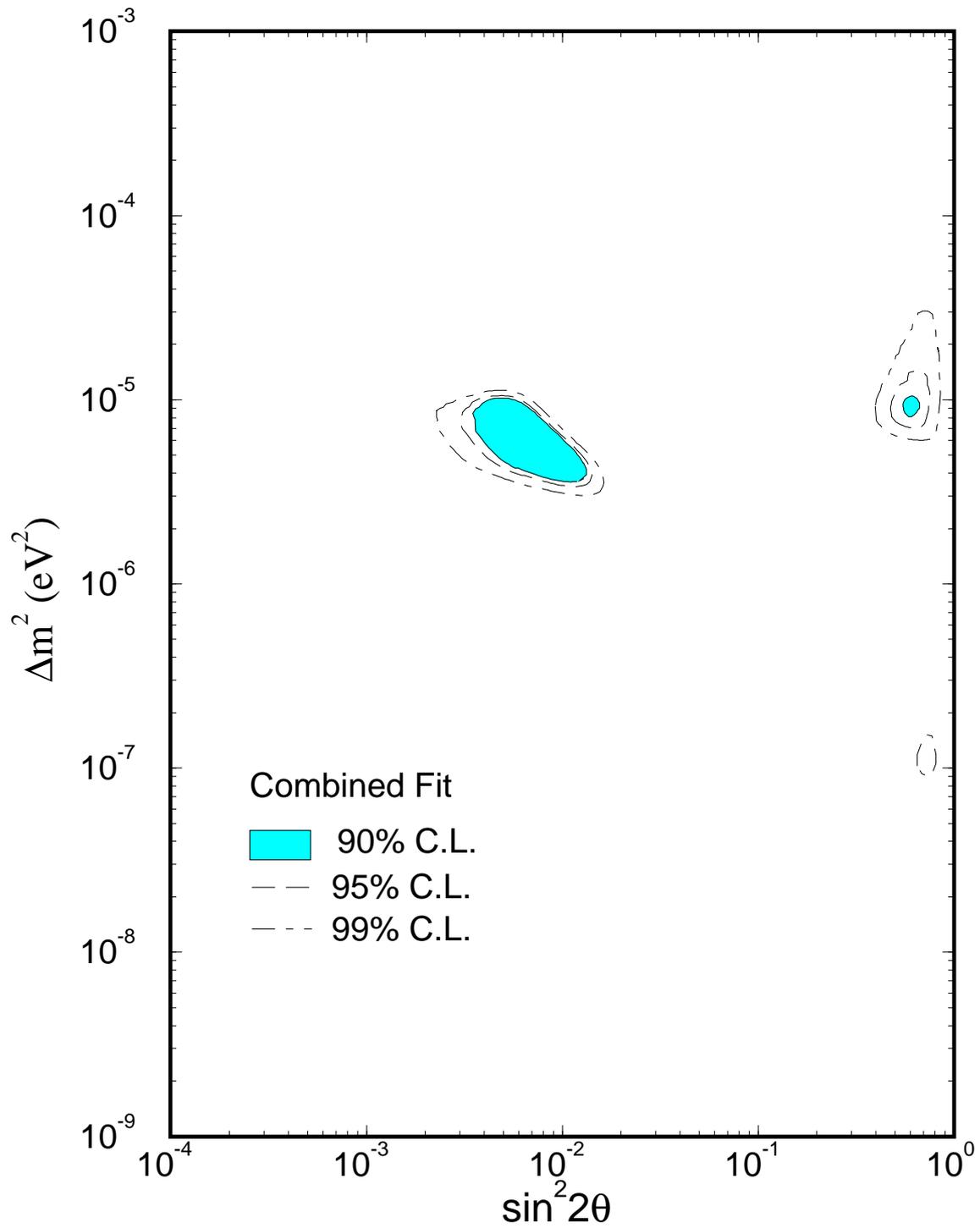


Abbildung 2.1: Erlaubte Parameterbereiche zur Erklärung des Sonnenneutrino-defizits durch den MSW Mechanismus nach Hata und Langacker [34].

Kapitel 3

Grand Unified Theorien

Alles fließt.

Heraklit

Das SM der Elementarteilchenphysik ist, obwohl es bisher mit den Experimenten hervorragend übereinstimmt, in mancher Hinsicht unbefriedigend. In diesem Kapitel sollen Ansätze vorgestellt werden, die auf die Beantwortung eines Teils der in der Einleitung erwähnten, offenen Fragen abzielen.

3.1 Einfache Erweiterungen des Standardmodells

3.1.1 Rechtshändige Neutrinos

Es gibt eine Reihe von Variationen des SMs, die sich mit der Frage nach den rechtshändigen Neutrinos beschäftigen [14].

Die wichtigste Erweiterung des SMs in Zusammenhang mit rechtshändigen Neutrinos und Neutrinomassen ist unter dem Namen „See-Saw-Mechanismus“ bekannt. Beim See-Saw-Mechanismus werden rechtshändige Neutrinos analog zu den übrigen rechtshändigen Fermionen eingeführt. Diese rechtshändigen Neutrinos haben die Darstellung $(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$. Jetzt ist es möglich, auch für die Neutrinos Yukawakopplungen und damit Dirac-Massenterme zu schreiben. Da die rechtshändigen Neutrinos keine Quantenzahlen tragen, ist es außerdem möglich Majorana-Massenterme zu schreiben. Die Massenterme für Neutrinos lauten also (für eine Familie geschrieben):

$$\mathcal{L}^{\text{M-D}} = -m_D \bar{\nu}_R \nu_L - \frac{1}{2} m_M \bar{\nu}_R (\nu_R)^c + \text{h.c.} = -\overline{(\nu_L^c \ \nu_R)} M \begin{pmatrix} \nu_L \\ \nu_R^c \end{pmatrix}, \quad (3.1)$$

mit

$$M = \begin{pmatrix} 0 & m_D \\ m_D & m_M \end{pmatrix}. \quad (3.2)$$

Die symmetrische Matrix M läßt sich durch eine orthogonale Transformation diagonalisieren. Die Neutrinofelder werden zu Linearkombinationen von Majorana-Neutrinos mit definiter Masse:

$$\mathcal{L}^{\text{M-D}} = -\frac{1}{2} \left(m_{\nu_{\text{light}}} \overline{\nu_{\text{light}}} \nu_{\text{light}} + m_{\nu_{\text{heavy}}} \overline{\nu_{\text{heavy}}} \nu_{\text{heavy}} \right) \quad (3.3)$$

und

$$\begin{aligned} \nu_L &= \cos \theta \nu_{\text{light}} + \sin \theta \nu_{\text{heavy}} \\ \nu_R^c &= -\sin \theta \nu_{\text{light}} + \cos \theta \nu_{\text{heavy}} \end{aligned} \quad (3.4)$$

Für den See-Saw-Mechanismus wird nun angenommen, daß die Dirac-Massen der Neutrinos etwa die gleiche Größenordnung haben, wie die Massen der anderen Fermionen, die Majorana-Massen jedoch sehr viel größer sind. Für die Massen der neuen Felder bedeutet das:

$$m_{\nu_{\text{light}}, \nu_{\text{heavy}}} = \frac{1}{2} \left| m_M \mp \sqrt{m_M^2 + 4m_D^2} \right| \simeq \begin{cases} \frac{m_D^2}{m_M} \\ m_M \end{cases} \quad (3.5)$$

Dieser Mechanismus liefert also Erklärungen für die Unterdrückung der Neutrinomassen und für die Abwesenheit von rechtshändigen Neutrinos. Offen bleibt die Frage, wieso die Majorana-Massen so überaus groß sind gegenüber den Dirac-Massen.

Erweitert man diesen Mechanismus auf drei Familien, so sind die Dirac-Massen M_D und die Majorana-Massen M_M 3×3 -Matrizen im Familienraum. Die Massenmatrix für die leichte Neutrinos läßt sich analog zu (3.5) berechnen:

$$\begin{aligned} M_{\nu_{\text{light}}} &\simeq M_D M_M^{-1} M_D^T \\ M_{\nu_{\text{heavy}}} &\simeq M_M \end{aligned} \quad (3.6)$$

Sowohl in der Dirac-, als auch in der Majorana-Massenmatrix können Familienmischungen auftreten. Die Neutrinomassenmatrix $M_{\nu_{\text{light}}}$ muß also entsprechend Gl. (2.19) diagonalisiert werden. Die Masseneigenzustände der leichten Neutrinos ergeben sich analog zu (2.20).

Im geladenen Strom kann V_L^E nun nicht mehr absorbiert werden:

$$\begin{aligned} J_W^\mu &= \overline{(e^m, \mu^m, \tau^m)} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{CKM}^L \begin{pmatrix} \nu_e^m \\ \nu_\mu^m \\ \nu_\tau^m \end{pmatrix} \\ &\quad + \overline{(d^m, s^m, b^m)} \gamma^\mu (1 - \gamma^5) V_{CKM} \begin{pmatrix} u^m \\ c^m \\ t^m \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

wobei $V_{CKM}^L = V_L^E V_L^\nu$ die leptonic Cabbibo-Kobayashi-Maskawa-Matrix ist. Die Parametrisierung erfolgt analog zur Parametrisierung der CKM-Matrix (2.23).

3.1.2 Zwei Higgs-Doublets

Eine andere Variation des SMs ist das SM mit zwei Higgs-Doublets. Diese Erweiterung soll hier beschrieben werden, weil sie für die Konstruktion von GUTs von Bedeutung ist. Bei der Konstruktion des Higgs-Sektors im SM benutzt man die Tatsache, da die Darstellung der Higgs-Teilchen reell ist, um den u -artigen Quarks Massen zu geben (Abschnitt 2.4). Dies ist nicht mehr möglich, falls die Higgsdarstellung des SMs in eine komplexe Darstellung eingebettet werden soll.

In diesem Fall muß eine zweite $(\mathbf{1}, \mathbf{2})$ -Higgsdarstellung eingeführt werden, die den Vakuumerwartungswert in der $I_3 = +\frac{1}{2}$ -, statt in der $I_3 = -\frac{1}{2}$ -Komponente hat und deren Hyperladung $Y = -\frac{1}{2}$ ist. Die Yukawakopplung für u -Quarks lautet nun:

$$y_{uu} \overline{(u, d)_L} \begin{pmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \end{pmatrix} u_R + \text{h.c.} \quad (3.8)$$

Durch die Symmetriebrechung ergibt sich wiederum der Massenterm:

$$y_{uu} \overline{u}_L \langle \psi_1 \rangle u_R = m_u \overline{u}_L u_R \quad (3.9)$$

$\langle \psi_1 \rangle$ ist auch der Vakuumerwartungswert, der in den (Dirac-)Massentermen der Neutrinos auftaucht, falls rechtshändige Neutrinos benutzt werden. Das Verhältnis der Vakuumerwartungswerte im Zwei-Higgs-Modell wird mit $\tan \beta$ bezeichnet:

$$\tan \beta = \frac{\langle \psi_1 \rangle}{\langle \phi_2 \rangle} \quad (3.10)$$

Während dieses Verhältnis ein zusätzlicher freier Parameter des Modells ist, wird die Summe der Quadrate der Vakuumerwartungswerte durch den Vakuumerwartungswert im Ein-Higgs-Modell festgelegt:

$$\langle \phi_2 \rangle_{1\text{-Higgs}}^2 = \langle \phi_2 \rangle_{2\text{-Higgs}}^2 + \langle \psi_1 \rangle_{2\text{-Higgs}}^2 \simeq (174 \text{ GeV})^2 \quad (3.11)$$

3.2 $SU(5)$

Die bisher beschriebenen Erweiterungen der SMs liefern keine tieferen Einsichten in die Theorie, im Gegenteil, die Anzahl der freien Parameter des Modells wurde noch vergrößert. Dies ist bei GUTs anders. Das Ziel bei der Konstruktion von GUTs ist die Vereinheitlichung der drei Kräfte im SM. Inspiriert wird dieses Konzept durch die Entwicklung der effektiven Kopplungen des SMs bei hohen Energien (Abb. 3.1), bei der sich die drei Kopplungen in der Nähe von 10^{15} GeV kreuzen. Die Idee ist, daß man oberhalb dieser Skala eine neue Theorie mit nur noch einer Kopplung hat.

Die erste GUT wurde von Georgi und Glashow [28] 1974 vorgeschlagen und von Buras et. al. [16] ausgeführt. Statt durch die SM-Gruppe $SU(3) \times SU(2) \times U(1)$ sollte oberhalb einer Skala von etwa 10^{14} GeV die

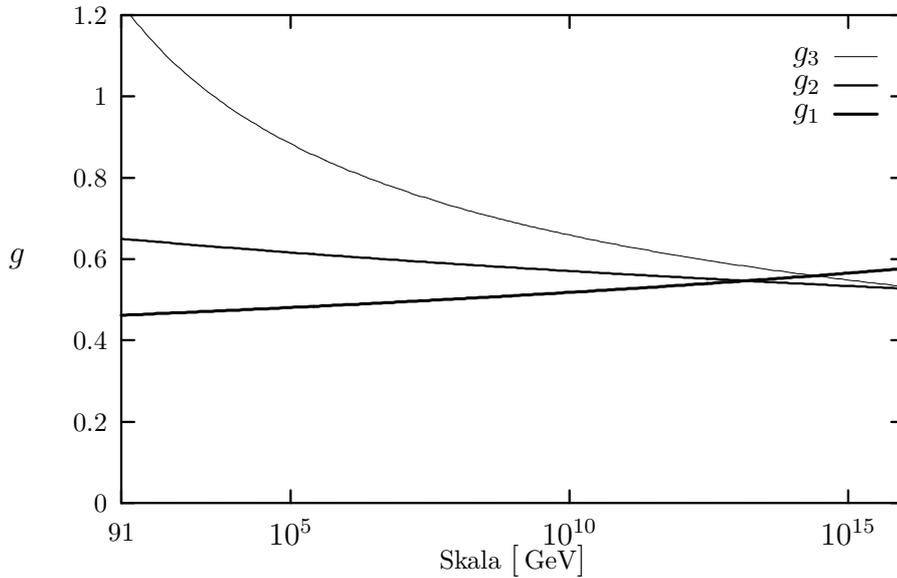


Abbildung 3.1: Entwicklung der Eichkopplungen im SM

Eichsymmetrie durch die $SU(5)$ gegeben sein. Die Fermionen einer Generation werden in eine 5-dimensionale und eine 10-dimensionale Darstellung aufgeteilt. In der **5**-Darstellung der ersten Familie findet man die rechtshändigen d -Quarks, das linkshändige Elektron und das linkshändige Elektronenneutrino. In der **10**-Darstellung sind die übrigen Teilchen enthalten. Die Eichbosonen

	5	10
1. Familie	d_R, e_L^c, ν_{eL}^c	u_L, u_R^c, d_L, e_L
2. Familie	$s_R, \mu_L^c, \nu_{\mu L}^c$	c_L, c_R^c, s_L, μ_L
3. Familie	$b_R, \tau_L^c, \nu_{\tau L}^c$	t_L, t_R^c, b_L, τ_L

Tabelle 3.1: Die Fermionen und ihre Darstellungen in der $SU(5)$

der $SU(5)$ leben in der adjungierten Darstellung, der **24**. Zusätzlich zu den Eichbosonen des SMs gibt es hier noch Eichbosonen, die Leptonen in Quarks und umgekehrt wandeln können. Diese Eichbosonen werden deshalb auch als Leptoquarks bezeichnet.

Die Symmetriebrechung der $SU(5)$ erfolgt analog zur Brechung des SMs in $SU(3) \times U(1)$, indem für die Leptoquarks über den Higgs-Mechanismus Massen erzeugt werden. Dies ist mit einer **24**-Higgsdarstellung möglich. Die so entstehenden Massen der Leptoquarks $M_{SU(5)}$ liegen in einer Größenordnung von 10^{15} GeV, so daß unterhalb dieser Skala das SM als effektive Theorie gültig ist.

Da in der $SU(5)$ Quarks in Leptonen umgewandelt werden können, ist das

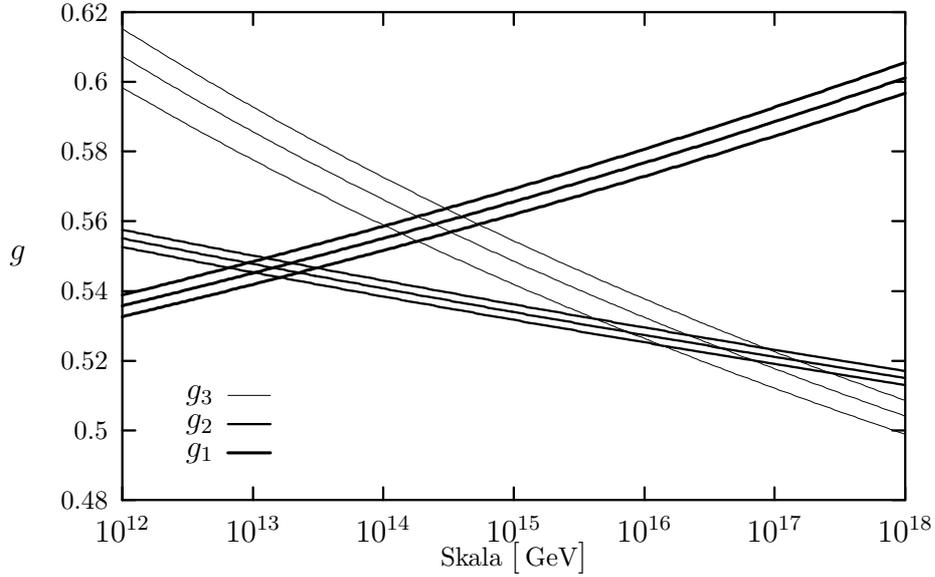


Abbildung 3.2: Entwicklung der Eichkopplungen im SM mit Fehlern

Proton nicht mehr stabil. Die Lebensdauer des Protons ist von der Masse der Leptoquarks abhängig:

$$\tau_{p \rightarrow e^+ \pi^0} \sim \frac{M_{SU(5)}^4}{\alpha_{SU(5)}^2 m_p^5}, \quad (3.12)$$

wobei m_p die Protonenmasse und $\alpha_{SU(5)} = g_{SU(5)}^2/4\pi$ die Kopplung an der Skala $M_{SU(5)}$ ist [39]. Für die angegebene Skala von $M_{SU(5)} \simeq 10^{15}$ GeV ergibt sich eine Protonenlebensdauer von $\tau_{p \rightarrow e^+ \pi^0} \simeq 4 \cdot 10^{31}$ Jahre. Dies war noch Anfang der 80er Jahre jenseits der experimentellen Grenze von 10^{30} Jahren. Erst die neuesten Experimente konnten die Untergrenze für die Protonenlebensdauer auf $\tau_{p \rightarrow e^+ \pi^0} > 10^{33}$ Jahre steigern. Dies entspricht einer unteren Schranke von $M_{SU(5)} > 2.2 \cdot 10^{15}$ GeV.

In den letzten Jahren konnten auch die Eichkopplungen genauer bestimmt werden. Nach diesen neuen Daten treffen sich die Eichkopplungen nicht mehr in einem Punkt, sondern bilden ein Dreieck (Abb. 3.2). Die Kopplungen g_1 und g_2 treffen sich bei etwa 10^{13} GeV weit unterhalb der unteren Schranke.

Bevor ich auf dieses Problem zurückkomme, möchte ich noch zwei weitere Eichgruppen vorstellen.

3.3 $SO(10)$

Will man in einer GUT auch rechtshändige Neutrinos unterbringen, so muß eine Gruppe gefunden werden, in deren Darstellungen das zusätzliche Fermion untergebracht werden kann. In der $SO(10)$ ermöglicht die **16** einen Fermioninhalt, der nur das rechtshändige Neutrino als zusätzliches Teilchen

enthält. Auch diese Vereinheitlichungsgruppe wurde bereits 1974 vorgeschlagen [25, 27]. Neben der Einführung der rechtshändigen Neutrinos bietet $SO(10)$ den Vorteil, daß in dieser Theorie alle Fermionen einer Familie in derselben Darstellung leben. Das bewirkt, daß die Theorie automatisch anomaliefrei ist.

3.4 E_6

Betrachtet man die Dynkin-Diagramme von $SU(5)$, $SO(10)$ und E_6 , so ergibt sich E_6 als natürliche Erweiterung der beiden ersten Gruppen. Da E_6 als Ausnahme-Gruppe jedoch nicht in einer unendlichen Reihe von Lie-Gruppen steht, erscheint diese Wahl weniger willkürlich als die der anderen beiden Gruppen. E_6 ist dazu die einzige Ausnahme-Gruppe mit komplexen Darstellungen. Die Fermionen bilden eine **27**. Ebenso wie $SO(10)$ ist E_6 also anomaliefrei. Als Higgsdarstellungen kommen **27**, **351**, **351'** und **650** in Frage. Die Darstellungen **351** und **351'** sind zwei verschiedene Darstellungen der gleichen Dimension. Interessant ist die **27**, da diese Higgsdarstellung die Möglichkeit von dynamischer Symmetriebrechung eröffnet. Die Eichbosonen in der E_6 bilden eine **78**.

3.5 Das Pati–Salam-Modell

Alle GUTs widersprechen, wenn sie direkt in das SM gebrochen sind, den experimentellen Ergebnissen von Protonlebensdauer und Weinbergwinkel. Eine Möglichkeit, diese beiden Probleme zu lösen, ist die Einführung einer Zwischenskala M_I , bei der eine teilweise Vereinheitlichung stattfindet. Oberhalb dieser intermediären Skala ändert sich dadurch der Verlauf der Eichkopplungen. Durch die Forderung nach Vereinheitlichung der Eichkopplungen kann M_I festgelegt werden.

Das Pati–Salam-Modell (PS-Modell) benutzt zur teilweisen Vereinheitlichung die Eichgruppe $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$. Die Fermionen einer Familie im PS-Modell bilden eine $(\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ und eine $(\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ -Darstellung. Die erste Darstellung enthält die linkshändigen, die zweite die rechtshändigen Fermionen der Familie. Sowohl links-, als auch rechtshändige Teilchen bilden also Doubletts. Zu den dreifarbigem Quarks kommt ein Lepton als „vierte Farbe“ hinzu. Wie im SM werden diese Darstellungen dreimal wiederholt, um drei Familien zu erhalten.

Im PS-Modell gibt es drei Sorten von Eichbosonen: $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$ W^\pm und Z , die bekannten Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung, $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ die rechtshändigen Gegenstücke und $(\mathbf{15}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ 8 Gluonen und 7 Leptoquarks. Die Leptoquarks dieses Modells können keinen Protonzerfall erzeugen, so daß die Protonlebensdauer durch die Vereinheitlichungsskala $M_{SO(10)}$ bestimmt wird.

Die zwei Higgs-Doubletts des erweiterten Standardmodells bilden zusammen eine $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ -Darstellung. Zur Brechung des PS-Modells in das SM wird

eine weitere Higgsdarstellung benötigt. Diese muß einen Vakuumerwartungswert von der Größenordnung M_{PS} haben und den Leptoquarks sowie den rechtshändigen Neutrinos eine schwere Masse geben. Dies kann mit einer $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ erreicht werden.

Wenn man die β -Funktionen der Eichkopplungen benutzt, so ergeben sich die Skalen (Tab. 3.2) aus der Forderung nach Vereinheitlichung. Die Zwei-Schleifen-Ergebnisse sind aus [21] übernommen.

	Ein-Schleifen-Genauigkeit	Zwei-Schleifen-Genauigkeit
M_{PS}	$7.5 \cdot 10^{11}$ GeV	$5.6 \cdot 10^{10}$ GeV
$M_{SO(10)}$	$2.0 \cdot 10^{16}$ GeV	$4.5 \cdot 10^{15}$ GeV

Tabelle 3.2: Die Skalen im Pati-Salam-Modell

Eine Variation dieses Modells ergibt sich, wenn man als zusätzliche Symmetrie die Paritätserhaltung fordert. In diesem $SU(4) \times SU(2) \times SU(2) \times P$ Modell muß zu jeder Darstellung $(\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c})$ auch eine Darstellung $(\mathbf{a}, \mathbf{c}, \mathbf{b})$ enthalten sein. Dadurch bleiben auch die linkshändige und die rechtshändige Eichkopplungen gleich. Für dieses Modell würden sich andere Skalen ergeben.

3.6 $SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$

Eine andere Möglichkeit zur teilweisen Vereinheitlichung bietet die Gruppe $SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$. Dieses linksrechtssymmetrische Modell bezeichne ich als LR-Modell.

Die Fermionen einer Familie bilden eine $(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$ und eine $(\mathbf{3}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$ Darstellung. Vom SM aus betrachtet entspricht das einer Zusammenfassung der rechtshändigen Teilchen zu Doublets, wobei auch rechtshändige Neutrinos gebraucht werden. Es gibt drei Sorten von Eichbosonen: $(\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1})$ W^\pm und Z , die bekannten Eichbosonen der schwachen Wechselwirkung, $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ deren rechtshändigen Gegenstücke und $(\mathbf{8}, \mathbf{1}, \mathbf{1})$ 8 Gluonen.

Die zwei Higgs-Doublets des erweiterten Standardmodells bilden zusammen eine $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ -Darstellung. Zur Brechung des LR-Modells in das SM wird eine weitere Higgsdarstellung benötigt. Diese muß einen Vakuumerwartungswert von der Größenordnung M_{LR} haben, und den rechtshändigen Neutrinos eine schwere Masse geben. Dies kann mit einer $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ erreicht werden.

Wenn man die β -Funktionen der Eichkopplungen benutzt, so ergeben sich die Skalen (Tab. 3.3) aus der Forderung nach Vereinheitlichung. Die Zwei-Schleifen-Ergebnisse sind aus [21] übernommen.

Auch für das LR-Modell kann zusätzlich die Paritätserhaltung gefordert werden.

	Ein-Schleifen-Genauigkeit	Zwei-Schleifen-Genauigkeit
M_{LR}	$9.4 \cdot 10^8 \text{ GeV}$	$5.0 \cdot 10^8 \text{ GeV}$
$M_{SO(10)}$	$2.9 \cdot 10^{16} \text{ GeV}$	$3.9 \cdot 10^{16} \text{ GeV}$

Tabelle 3.3: Die Skalen im LR-Modell

3.7 Schwelleneffekte — Der Übergang zwischen den Theorien

Bisher habe ich von den vereinheitlichten Theorien als von Theorien gesprochen, die „oberhalb einer bestimmten Skala“ gelten. Dieser Ausdruck soll in diesem Abschnitt präzisiert werden.

Während man sich bei der Konstruktion von GUTs, vom SM ausgehend, zu höheren Energien vortastet, muß für die Konstruktion effektiver Theorien der umgekehrte Weg gegangen werden. Das SM soll als niederenergetischer Grenzwert der vereinheitlichten Theorie gebildet werden.

Die Berechnung einer effektiven Wirkung $\tilde{S}[\psi]$, welche nur die leichten Felder ψ enthält, kann im Feynman-Pfadintegral-Formalismus als Integration über die schweren Felder Ψ geschrieben werden:

$$e^{i\tilde{S}[\psi]} = \int [d\Psi] e^{iS[\psi, \Psi]} \quad . \quad (3.13)$$

Als schwere Felder gelten die Freiheitsgrade der Theorie, welche gemäß der gewünschten Symmetriebrechung große Massen erhalten. Die neue Wirkung mit den leichten Feldern bildet, entsprechend der Konstruktion, nun eine Eichtheorie mit einer kleineren Symmetriegruppe.

Um zu erklären, was bei der Integration geschieht, möchte ich nun beispielhaft vorrechnen, wie sich der kinetische Term der Eichbosonen verhält, wenn man eine Eichgruppe G auf diese Art in die Untergruppen $G_1 \times \dots \times G_n$ bricht (siehe [31]).

Die Lagrangedichte der ursprünglichen Theorie ist

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4} F_{\alpha}^{\mu\nu} F_{\alpha\mu\nu} + \bar{\psi} (i\not{D} - M_F) \psi + \dots \quad (3.14)$$

mit

$$F_{\alpha}^{\mu\nu} = \partial^{\mu} A_{\alpha}^{\nu} - \partial^{\nu} A_{\alpha}^{\mu} - g C_{\alpha\beta\gamma} A_{\beta}^{\mu} A_{\gamma}^{\nu} \quad . \quad (3.15)$$

Zunächst wird die Lagrangedichte zerlegt, in einen Teil der nur leichte Teilchen und einen Teil der auch schwere Teilchen enthält. Den kinetischen Term der Eichbosonen kann man durch Aufspalten der Summe über α schreiben als

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{4}F_{\alpha}^{\mu\nu}F_{\alpha\mu\nu} &= -\frac{1}{4}\left(\tilde{F}_A^{\mu\nu} - g\sum_{i=1}^n C_{ABc_i}A_B^{\mu}A_{c_i}^{\nu} - g\sum_{i=1}^n C_{Ab_iC}A_{b_i}^{\mu}A_C^{\nu}\right)^2 \\
&\quad -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n\left(\tilde{F}_{a_i}^{\mu\nu} - gC_{a_iBC}A_B^{\mu}A_C^{\nu}\right)^2
\end{aligned} \tag{3.16}$$

mit

$$\begin{aligned}
\tilde{F}_{a_i}^{\mu\nu} &:= \partial^{\mu}A_{a_i}^{\nu} - \partial^{\nu}A_{a_i}^{\mu} - gC_{a_ib_ic_i}A_{b_i}^{\mu}A_{c_i}^{\nu} \\
\tilde{F}_A^{\mu\nu} &:= \partial^{\mu}A_A^{\nu} - \partial^{\nu}A_A^{\mu} - gC_{ABC}A_B^{\mu}A_C^{\nu} \quad .
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Über doppelt auftretende Indizes wird summiert, dabei durchlaufen die Indizes a_i, b_i, c_i nur die Felder der Eichgruppe G_i , die Indizes A, B, C durchlaufen die übrigen (schweren) Felder.

Die Terme $\tilde{F}_{a_i}^2$ ($i = 1 \dots n$) in (3.16) können aus der Integration (3.13) herausgenommen werden. Die Lagrangedichte der effektiven $G_1 \times \dots \times G_n$ -invarianten Theorie lt sich nun wie folgt schreiben:

$$\tilde{\mathcal{L}} = -\frac{1}{4}\sum_{i=1}^n\tilde{F}_{a_i}^{\mu\nu}\tilde{F}_{a_i\mu\nu} + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^n l_i\tilde{F}_{a_i}^{\mu\nu}\tilde{F}_{a_i\mu\nu} + \dots \quad , \tag{3.18}$$

wobei der zweite Term den Beitrag der Vakuumpolarisation durch schwere Felder darstellt. Dieser Beitrag hat die genannte Form, da Eichinvarianz gefordert wird.

Um die kanonisch normierten Feldstrken zu erhalten, mssen die $\tilde{F}_{a_i}^{\mu\nu}$ umnormiert werden. Die Potentiale der neuen Felder $\hat{F}_{a_i}^{\mu\nu}$ lauten

$$\hat{A}_{a_i} := \sqrt{1 - l_i} A_{a_i} \quad . \tag{3.19}$$

Gleichzeitig mu die Eichkopplung verndert werden, damit sich die kovariante Ableitung nicht ndert:

$$\begin{aligned}
D^{\mu} = \partial^{\mu} - i\sum_{i=1}^n \frac{g}{2} t_{a_i} A_{a_i}^{\mu} &=: \hat{D}^{\mu} = \partial^{\mu} - i\sum_{i=1}^n \frac{g_i}{2} t_{a_i} \hat{A}_{a_i}^{\mu} \\
\Rightarrow \quad g_i &= \frac{g}{\sqrt{1 - l_i}} \quad .
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Nach Hall [31] gilt $l_i = g^2\lambda_i$, mit λ_i unabhngig von g , so da

$$\frac{1}{g_i^2} = \frac{1}{g^2} - \lambda_i \tag{3.21}$$

gilt. Der allgemeiner Ausdruck fr λ_i wird von Hall angegeben. λ_i ist erst fr Zwei-Schleifen-Rechnungen von 0 verschieden.

Obwohl bisher in der Literatur nicht beschrieben und nicht allgemein berechnet, ist es klar, da solche Korrekturen auch fr Yukawakopplungen auftreten. Ebenso wie für die Eichkopplungen ergibt sich aus der Eichsymmetrie, daß die Korrektur des kinetischen Terms eine Umnormierung der Felder nötig macht, die wiederum eine Änderung der Yukawakopplungen zur Folge hat. Da die betrachteten Modelle drei Familien von Fermionen besitzen und die Yukawakopplungen Matrizen im Familienraum sind, sind die möglichen Schwellenkorrekturen ebenfalls komplexe 3×3 -Matrizen.

Kapitel 4

Die verwendeten Modelle

In diesem Abschnitt sollen die von mir verwendeten Modelle und deren mögliche Variationen vorgestellt werden.

4.1 Das zugrunde liegende E_6 -Modell

Das im folgenden verwendete E_6 -Modell besitzt drei **27**-Darstellungen, in diesen sind die Fermionen der drei Familien untergebracht. Dazu gibt es eine **27**, die das Higgs darstellt, welches den Fermionen Massen geben soll. Die **351'** und die **650** sollen benutzt werden, um die notwendigen Symmetriebrechungen bis ins SM zu erzeugen. Ich verwende keine **351**-Darstellung.

In allen Modellen, die ich untersuche, soll die E_6 Symmetrie zunächst in eine $SO(10) \times U(1)$ Symmetrie gebrochen werden. Die Zerlegung der einzelnen Darstellungen ist in Tab. 4.1 aufgeführt. Es wird angenommen, daß aus den Fermiondarstellungen nur die **16** überlebt, während aus der **27**-Higgsdarstellung die **10** übrig bleibt. Aus der **78** und der **351'** bleiben die **45** bzw. die **54** und die **126** bestehen.

$$\begin{aligned} \mathbf{27} &\longrightarrow \mathbf{1} + \mathbf{10} + \mathbf{16} \\ \mathbf{78} &\longrightarrow \mathbf{1} + \mathbf{45} + \mathbf{16} + \overline{\mathbf{16}} \\ \mathbf{351} &\longrightarrow \mathbf{10} + \mathbf{16} + \overline{\mathbf{16}} + \mathbf{45} + \mathbf{120} + \mathbf{144} \\ \mathbf{351}' &\longrightarrow \mathbf{1} + \mathbf{10} + \overline{\mathbf{16}} + \mathbf{54} + \overline{\mathbf{126}} + \mathbf{144} \\ \mathbf{650} &\longrightarrow \mathbf{1} + \mathbf{10} + \mathbf{10} + \mathbf{16} + \overline{\mathbf{16}} + \mathbf{45} + \mathbf{54} + \mathbf{144} + \overline{\mathbf{144}} + \mathbf{210} \end{aligned}$$

Tabelle 4.1: Zerlegung der E_6 -Darstellungen unter $SO(10) \times U(1)$

4.2 Die Brechungswege des $SO(10)$ -Modells

Für die Brechung der $SO(10)$ -Symmetrie gibt es mehrere Möglichkeiten. Brechungswege über $SU(5)$ sollen hier nicht berücksichtigt werden, da das mini-

male Modell sowohl wegen der Protonzerfallsexperimente, als auch wegen der Eichkopplungen ausgeschlossen ist. Erweiterte Modelle vergrößern hingegen die Anzahl der Parameter und verringern damit die Voraussagekraft.

Weitere Brechungswege beginnen bei der maximalen Untergruppe $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$. Die Brechung kann durch die **54** oder die **210**-Higgsdarstellung erfolgen. Verwendet man die **54**, bleibt zusätzlich eine diskrete Symmetrie P , die Parität, erhalten. P garantiert die Gleichheit der Eichkopplungen in der beiden $SU(2)$. Nimmt man dagegen die **210** zur Brechung, so ist P ebenfalls gebrochen.

Um zum SM zu gelangen, wird die $SU(4)$ in $SU(3) \times U(1)$ zerlegt, das sind die bliche Farbsymmetrie und die $B - L$ -Symmetrie. Weiterhin mu die rechtshändige $SU(2)$ nach $U(1)$ gebrochen werden. Die Brechung der $B - L$ -Symmetrie lt eine Kombination der Quantenzahl $B - L$ und der rechtshändigen Ladung berleben. Die resultierende $U(1)$ bildet die bekannte Y -Ladung des Standardmodells. Die Wahl der Reihenfolge der einzelnen Skalen ermöglicht eine Reihe von Brechungsschemata. Legt man mehrere Skalen zusammen, so kann das Schema vereinfacht werden.

4.2.1 Das Pati-Salam-Modell

In dieser Arbeit wurde zunächst die $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ -Symmetrie für einen Bereich von der $SO(10)$ -Skala $M_{SO(10)}$ bis zur intermediären Skala M_{PS} angenommen. Die Brechung ins Standardmodell erfolgt an dieser Skala in einem Schritt. Da dies die stärkste intermediäre Symmetrie ist, können Abweichungen von dieser Symmetrie Hinweise auf das benötigte Brechungsschema geben. Die Zerlegung der einzelnen Darstellungen ist in Tab. 4.2 aufgeführt.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{10} &\longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) + (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) \\
 \mathbf{16} &\longrightarrow (\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1}) + (\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2}) \\
 \mathbf{45} &\longrightarrow (\mathbf{1}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) + (\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) + (\mathbf{15}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{2}) \\
 \mathbf{126} &\longrightarrow (\mathbf{6}, \mathbf{1}, \mathbf{1}) + (\bar{\mathbf{10}}, \mathbf{3}, \mathbf{1}) + (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) + (\mathbf{15}, \mathbf{2}, \mathbf{2})
 \end{aligned}$$

Tabelle 4.2: Zerlegung der $SO(10)$ -Darstellungen unter $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$

Von den Higgsdarstellungen bleiben nur die $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ und die $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ erhalten, die übrigen bekommen durch die $SO(10)$ -Brechung schwere Massen. Die $(\mathbf{6}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ der Eichbosonen erhalten ebenfalls schwere Massen. In dieser Darstellung sind die Leptoquarks enthalten, die den Protonzerfall verursachen.

Beim Übergang zum Standardmodell, der durch die $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ erzeugt wird, erhalten die rechtshändigen Neutrinos eine (Majorana-) Masse. Die $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ enthält die beiden Higgs-Doublets, die den bekannten Fermionen später die Massen geben.

4.2.2 Das LR-Modell

Später wurde auch ein Modell untersucht, bei dem die $SU(4)$ bereits an der Skala $M_{SO(10)}$ in $SU(3) \times U(1)$ gebrochen ist. Um die $SO(10)$ direkt in $SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$ brechen zu können, kann eine **45** oder eine **210** benutzt werden. Wird die **210** benutzt, so bleibt die Parität erhalten. In diesen LR-Modellen bleibt von der $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ des Pati-Salam-Modells nur die $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ erhalten. Die Symmetrie $SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$ gilt bis zur Skala M_{LR} . Hier wird das Modell durch die $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ in einem Schritt in das Standardmodell gebrochen.

$$\begin{array}{rcl}
 \mathbf{4} & \longrightarrow & \mathbf{3} + \mathbf{1} \\
 \mathbf{6} & \longrightarrow & \mathbf{3} + \bar{\mathbf{3}} \\
 \mathbf{10} & \longrightarrow & \mathbf{6} + \mathbf{3} + \mathbf{1} \\
 \mathbf{15} & \longrightarrow & \mathbf{8} + \bar{\mathbf{3}} + \mathbf{3} + \mathbf{1}
 \end{array}$$

Tabelle 4.3: Zerlegung der $SU(4)$ -Darstellungen unter $SU(3) \times U(1)$

Eine Zusammenfassung des Brechungsweges und der Zerlegung der benutzten Darstellungen findet sich in Tab. 4.4. Zu beachten ist, daß die Darstellungen der rechtshändigen Teilchen wie Antiteilchen transformieren, also die ladungskonjugierten Felder enthalten müssen. Das PS-Modell entspricht der Situation $M_{E_6} \geq M_{SO(10)} > M_{PS} = M_{LR}$, im LR-Modell gilt $M_{E_6} \geq M_{SO(10)} = M_{PS} > M_{LR}$.

4.3 Die Randbedingungen in Baumnäherung

Aus dem bisher Gesagten ergeben sich die Beziehungen zwischen den Eich- bzw. Yukawakopplungen der verschiedenen Modelle.

Bei der Brechung einer Symmetrie verhalten sich die Eichkopplungen stetig. Abweichungen von dieser Regel ergeben sich nur bei der Brechung von zwei $U(1)$ -Symmetrien in eine einzelne $U(1)$. In solchen Fällen beruht im allgemeinen eine Kombination der beiden ursprünglichen Quantenzahlen, die neue Kopplungsstärke ist eine Mischung der beiden ursprünglichen Kopplungsstärken.

Auch die Brechung des SMs nach $SU(3) \times U(1)$ fällt in diese Kategorie: Bei der Brechung der $SU(2)$ entsteht, zusätzlich zur vorhandenen $U(1)$ der Y -Ladung, eine linkshändige $U(1)$. Von diesen beiden beruht jedoch nur eine Kombination: Die elektrische Ladung.

In den von mir untersuchten Modellen tritt diese Situation bei der Brechung des Pati-Salam-Modells auf. Sowohl bei der Brechung der $SU(4)$, als auch bei der Brechung der rechtshändigen $SU(2)$, entsteht eine $U(1)$ -Symmetrie. Durch die Brechung dieser beiden $U(1)$ -Symmetrien in eine einzige entsteht die Y -Ladung. Der Mischungswinkel dieser beiden Kopplungen

E_6	$\xrightarrow{M_{E_6}}$	$SO(10)$	$\xrightarrow{M_{SO(10)}}$	PS	$\xrightarrow{M_{PS}}$	LR	$\xrightarrow{M_{LR}}$	SM
						$(\mathbf{3}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$	\rightarrow	$(\mathbf{3}, \mathbf{2})_{\frac{1}{6}}$
				$(\mathbf{4}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$	\nearrow	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{1})$	\rightarrow	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}$
Fermionen			\nearrow					
$\mathbf{27}$	\rightarrow	$\mathbf{16}$						
			\searrow					
				$(\bar{\mathbf{4}}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$	\rightarrow	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$	\nearrow	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{-\frac{2}{3}}$
					\searrow	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{2})$	\rightarrow	$(\bar{\mathbf{3}}, \mathbf{1})_{\frac{1}{3}}$
							\searrow	$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_1$
								$(\mathbf{1}, \mathbf{1})_0$
Higgs							\nearrow	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{\frac{1}{2}}$
$\mathbf{27}$	\rightarrow	$\mathbf{10}$	\rightarrow	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	\rightarrow	$(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$	\rightarrow	$(\mathbf{1}, \mathbf{2})_{-\frac{1}{2}}$
Higgs								
$\mathbf{351}'$	\rightarrow	$\mathbf{126}$	\rightarrow	$(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$	\rightarrow	$(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$		

Tabelle 4.4: Das verwendete Brechungsschema der E_6 und die Zerlegung der Darstellungen.

wird von Harvey, Ramond und Reiss [32] angegeben:

$$\frac{1}{g_1(M_{PS})^2} = \frac{\sin^2(\phi)}{g_r(M_{PS})^2} + \frac{\cos^2(\phi)}{g_4(M_{PS})^2} \quad (4.1)$$

mit

$$\sin(\phi) = \sqrt{\frac{3}{5}} \quad \cos(\phi) = \sqrt{\frac{2}{5}} \quad . \quad (4.2)$$

Auch bei der Brechung des LR-Modells werden zwei Kopplungen gemischt: Die Kopplung der $B - L$ -Symmetrie mit der $U(1)$, die bei der Brechung der rechtshändigen $SU(2)$ entsteht. Es gilt

$$\frac{1}{g_1(M_{LR})^2} = \frac{\sin^2(\phi)}{g_r(M_{LR})^2} + \frac{\cos^2(\phi)}{g_{B-L}(M_{LR})^2} \quad (4.3)$$

mit dem gleichen Winkel ϕ .

Auch die Yukawakopplungen sind in Baumnherung an den Schwellen stetig. Daher geht es im folgenden hauptsächlich darum, welche Kopplungen der verschiedenen Modelle miteinander verbunden sind und wie sie hier bezeichnet werden.

Die Kopplungsstärke, mit der die $\mathbf{10}$ an die Fermionen koppelt, bezeichne ich mit $Y^{SO(10)}$. Die Kopplung an die $\mathbf{126}$ nenne ich $V_r^{SO(10)}$. Beide Kopplungen sind Matrizen im Familienraum.

Die analogen Kopplungen kommen im Pati–Salam-Modell vor: Y^{PS} ist die Kopplungsstärke der $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$, V_r^{PS} die Kopplungsstärke der $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$. Der Vakuumerwartungswert dieser Higgsdarstellung wird mit v_r bezeichnet.

Im LR-Modell koppelt die $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ unterschiedlich an Quarks und Leptonen. Die Kopplungen heißen entsprechend Q^{LR} und L^{LR} , müssen aber an der Skala M_{PS} gleich sein. V_r^{LR} ist die Kopplungsstärke der $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$. Deren Vakuumerwartungswert ist wiederum v_r .

Bei der Brechung ins SM werden die Fermiondarstellungen geteilt. Jede Darstellung erhält eine unabhängige Kopplungskonstante. Diese sollen nach den Teilchen der ersten Familie mit U^{SM} , D^{SM} , E^{SM} und V^{SM} bezeichnet werden. Obwohl auch die Higgsdarstellung gespalten wird, gibt es nur diese vier Kopplungen, da die eine Higgsdarstellung nur an d -artigen Quarks und geladene Leptonen koppelt, während die andere nur mit u -artigen Quarks und Neutrinos wechselwirkt.

Alle diese Kopplungen sind Matrizen im Familienraum und gleichzeitig Funktionen der Energieskala s . Die Abhängigkeit von dieser Energieskala ist gemäß Gl. (2.38) durch die zugehörige β -Funktion gegeben. An den Brechungsschwellen gelten für das PS-Modell folgende Beziehungen:

$$\begin{aligned}
Y^{PS}(M_{SO(10)}) &= Y^{SO(10)}(M_{SO(10)}) \\
V_r^{PS}(M_{SO(10)}) &= V_r^{SO(10)}(M_{SO(10)}) \\
\\
U^{SM}(M_{PS}) &= Y^{PS}(M_{PS}) \\
D^{SM}(M_{PS}) &= Y^{PS}(M_{PS}) \\
E^{SM}(M_{PS}) &= Y^{PS}(M_{PS}) \\
V^{SM}(M_{PS}) &= Y^{PS}(M_{PS}) \\
M_{\nu_R}(M_{PS}) &= v_r V_r^{PS}(M_{PS})
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Für das LR-Modell lauten die Beziehungen:

$$\begin{aligned}
Q^{LR}(M_{SO(10)}) &= Y^{SO(10)}(M_{SO(10)}) \\
L^{LR}(M_{SO(10)}) &= Y^{SO(10)}(M_{SO(10)}) \\
V_r^{LR}(M_{SO(10)}) &= V_r^{SO(10)}(M_{SO(10)})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
U^{SM}(M_{LR}) &= Q^{LR}(M_{LR}) \\
D^{SM}(M_{LR}) &= Q^{LR}(M_{LR}) \\
E^{SM}(M_{LR}) &= L^{LR}(M_{LR}) \\
V^{SM}(M_{LR}) &= L^{LR}(M_{LR}) \\
M_{\nu_R}(M_{LR}) &= v_r V_r^{LR}(M_{LR})
\end{aligned} \tag{4.5}$$

Bei der Skala M_Z , an der das Standardmodell in QCD und QED gebrochen wird, erhalten die Fermionen Massenterme (vgl. 2.4 und 3.1.2):

$$\begin{aligned}
M_U(M_Z) &= \langle \psi_1 \rangle U^{SM}(M_Z) \\
M_D(M_Z) &= \langle \phi_2 \rangle D^{SM}(M_Z) \\
M_E(M_Z) &= \langle \phi_2 \rangle E^{SM}(M_Z) \\
M_V(M_Z) &= \langle \psi_1 \rangle V^{SM}(M_Z)
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Die Massen der Quarks und der geladenen Leptonen ergeben sich durch Diagonalisierung gemäß Gl. (2.19). Um die Massen und Mischungen der beobachtbaren (leichten) Neutrinos zu erhalten, mu gem (3.6)

$$M_{\nu_{light}}(M_Z) = M_V(M_Z) M_{\nu_R}(M_Z)^{-1} M_V(M_Z)^T \tag{4.7}$$

diagonalisiert werden, denn M_V bezeichnet nur die Dirac-Neutrinomassen. Die Matrizen $V_{CKM}(M_Z)$ und $V_{CKM}^L(M_Z)$ ergeben sich aus den unitären Transformationsmatrizen.

4.4 Die β -Funktionen in allgemeinen Yang–Mills-Theorien

Die Entwicklung der Kopplungen zwischen den verschiedenen Skalen wird durch die β -Funktionen beschrieben.

Machacek und Vaughn haben diese in [42] und [43] auf 2-Schleifen-Genauigkeit für allgemeine Quantenfeldtheorien mit beliebiger Eichsymmetrie angegeben. Die allgemeine Lagrangedichte einer solchen Theorie wird dort mit Vektorbosonen V_μ^A , Fermionen ψ_j und *reellen* Skalaren ϕ_a geschrieben:

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \frac{1}{4} F_{\mu\nu}^A F_{\mu\nu}^A + \frac{1}{2} D_\mu \phi_a D_\mu \phi_a + i \psi_j^\dagger \sigma_\mu D_\mu \psi_j - \left(Y_{jk}^a \psi_j \zeta \psi_k \phi_a + \text{h.c.} \right) \\
&\quad + \frac{1}{4} \lambda_{abcd} \phi_a \phi_b \phi_c \phi_d + \dots \text{ (Massen-, Geist-, Eichsterme) }
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Die kovariante Ableitung ist hier $D_\mu = \partial_\mu - i g t^A A_\mu^A$. A numeriert die vorhandenen Eichbosonen, j und k numerieren die auftretenden Fermionen und a, b, c und d die Skalare. Der Feldstärketensor $F_{\mu\nu}^A$ ist wie in (2.2) definiert.

Zu beachten ist die Definition der Yukawakopplung Y_{jk}^a , welche die Kopplung der Fermionen an reelle Skalare beschreibt. Die symmetrische Behandlung der Indizes j und k ergibt eine Kopplung, die nur halb so gro ist wie

Gruppe	Darstellung	Dynkin-Index	Eigenwert des Casimiroperators
E_6	27	6	52/3
	78	24	24
	351	150	100/3
	351'	168	112/3
$SO(10)$	10	2	9
	16	4	45/4
	45	16	16
$SU(4)$	4	1	15/4
	6	2	5
	10	6	9
	15	8	8
$SU(3)$	3	1	8/3
	6	5	20/3
	8	6	6
$SU(2)$	2	1	3/2
	3	4	4
$U(1)$		Quadrat der $U(1)$ -Ladung	

Tabelle 4.5: Dynkin-Indizes und Eigenwerte der Casimiroperatoren verschiedener Gruppen und Darstellungen nach Slansky [49]

die der Beschreibung in Abschnitt 2.4, bei der j nur die linkshändigen und k nur die rechtshändigen Fermionen durchlaufen wrde. Auch die Eichkopplung ist nur halb so gro wie nach (2.3).

Im folgenden bezeichnet Y^a die Matrix mit den Einträgen Y_{jk}^a . Die Einschleifen-Anteile der β -Funktionen für eine Theorie mit der einfachen Eichgruppe G lauten dann [43]:

$$16\pi^2\beta^g[g] = \left(-\frac{11}{3}C_2(G) + \frac{4}{3}\kappa S_2(F) + \frac{1}{6}S_2(S)\right)g^3 \quad (4.9)$$

$$16\pi^2\beta^{Y^a}[Y^1, \dots, Y^n, g] = \frac{1}{2} \left(Y_2^+(F)Y^a + Y^a Y_2^+(F)\right) + 2Y^b Y^{+a} Y^b + 2\kappa Y^b \text{Tr} \left(Y^{+b} Y^a\right) - 3g^2 \{C_2(F), Y^a\} \quad , \quad (4.10)$$

wobei $Y_2(F) := Y^{+b} Y^b$ und für zweikomponentige Spinoren $\kappa = \frac{1}{2}$ gilt. Die geschweiften Klammern bezeichnen den Antikommutator der eingeschlossenen Operatoren. $C_2(F)$ ist der quadratische Casimiroperator der Fermiondarstellung, $C_2(G)$ der der adjungierten Darstellung. $S_2(S)$ und $S_2(F)$ sind die Dynkin-Indizes der Skalar- bzw. der Fermiondarstellung (Tab. 4.5).

Falls die Eichsymmetrie G nicht einfach, sondern ein direktes Produkt $G = G_1 \times \dots \times G_n$ mit den Eichkopplungen g_1, \dots, g_n ist, muß in (4.10) $g^2 C_2(F)$ durch $\sum_{i=1}^n g_i^2 C_2^i(F)$ ersetzt werden. β^{g_i} ergibt sich, indem man in

(4.9) den Casimiroperator und die Dynkin-Indizes bezüglich der Darstellungen in G_i auswertet.

Die β -Funktionen für ein spezielles Modell lassen sich nun berechnen, wenn man die Matrizen Y^a bestimmt hat. Diese erhält man am einfachsten, indem man die Yukawaterme der Lagrangedichte in Tensorform aufschreibt und mittels eines Programms für symbolische Algebra ausmultipliziert. Die Eichsymmetrie schreibt dabei Beziehungen zwischen den Einträgen der Matrizen vor. (Fermionen der gleichen Darstellung koppeln mit gleicher Stärke an ein ϕ^a , Skalare der gleichen Darstellung koppeln mit gleicher Stärke an ein ψ_j .) Da solche Beziehungen durch die Renormierungsgruppengleichungen erhalten bleiben, können sie zur Überprüfung der erhaltenen β -Funktionen dienen.

Zur Auswertung der ersten drei Terme von (4.10) habe ich ein Makropaket für Mathematica¹ geschrieben, welches die Matrizen Y^a als Eingabe benötigt. Der Eichkopplungsterm kann leicht von Hand ausgewertet werden.

4.4.1 Standardmodell

Als β -Funktionen der Yukawakopplungen im SM erhalte ich in bereinstimmung mit [43, Anhang B]:

$$\begin{aligned} 16\pi^2\beta^U[U, D, E, g_i] &= U \left(\frac{3}{2} (U^+U - D^+D) + Y_2 - \frac{17}{20}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_s^2 \right) \\ 16\pi^2\beta^D[U, D, E, g_i] &= D \left(\frac{3}{2} (D^+D - U^+U) + Y_2 - \frac{1}{4}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_s^2 \right) \\ 16\pi^2\beta^E[U, D, E, g_i] &= E \left(\frac{3}{2}E^+E + Y_2 - \frac{9}{4}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 \right) \end{aligned} \quad (4.11)$$

wobei

$$Y_2 := \text{Tr} \left(3U^+U + 3D^+D + E^+E \right) \quad .$$

Für das SM mit zwei Higgs-Doublets erhalte ich:

$$\begin{aligned} 16\pi^2\beta^U[U, D, E, g_i] &= U \left(\frac{3}{2}U^+U - \frac{1}{2}D^+D + \text{Tr}(3U^+U) \right. \\ &\quad \left. - \frac{17}{20}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_s^2 \right) \\ 16\pi^2\beta^D[U, D, E, g_i] &= D \left(\frac{3}{2}D^+D - \frac{1}{2}U^+U + \tilde{Y}_2 - \frac{1}{4}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 - 8g_s^2 \right) \\ 16\pi^2\beta^E[U, D, E, g_i] &= E \left(\frac{3}{2}E^+E + \tilde{Y}_2 - \frac{9}{4}g_1^2 - \frac{9}{4}g_2^2 \right) \end{aligned} \quad (4.12)$$

mit

¹Mathematica ist eingetragenes Warenzeichen der Wolfram Research Inc. [51].

$$\tilde{Y}_2 := \text{Tr}(3D^+D + E^+E) \quad .$$

Dabei bezeichnen U , D , E die Yukawakopplungen an die u -artigen, die d -artigen Quarks und die Leptonen.

Diese Gleichungen behalten ihre Gltigkeit auch, falls das Standardmodell um rechtshndige Neutrinos erweitert wurde, da die rechtshndigen Neutrinos wegen ihrer groen Masse entkoppeln. Statt der Entwicklung der Yukawakopplung V mten die Neutrinomassen von der Skala M_{ν_r} abwrts entwickelt werden.

Sowohl Chankowski und Pluciennik [18], als auch Babu, Leung und Pantaleone [8] haben darauf hingewiesen, da durch die rechtshndigen Neutrinos effektive 5-dimensionale Operatoren in der niederenergetischen Theorie auftreten, welche die Entwicklung der Neutrinomassen korrigieren. Die zugehorigen β -Funktionen werden in den Artikeln wiedergegeben. Sie wurden jedoch in dieser Arbeit noch nicht verwendet.

Die β -Funktionen der Eichkopplungen des SMs mit n_H Higgs-Doublets sind weithin bekannt. In Ein-Schleifen-Nherung lauten sie

$$\begin{aligned} 16\pi^2\beta^{g_s}[g_s] &= \left(-11 + \frac{4}{3}n_G\right)g_s^3 \\ 16\pi^2\beta^{g_2}[g_2] &= \left(-\frac{22}{3} + \frac{4}{3}n_G + \frac{n_H}{6}\right)g_2^3 \\ 16\pi^2\beta^{g_1}[g_1] &= \left(\frac{4}{3}n_G + \frac{n_H}{10}\right)g_1^3 \quad , \end{aligned} \quad (4.13)$$

wobei n_G die Anzahl der Generationen ist.

4.4.2 Pati–Salam-Modell

Das Pati–Salam-Modell enthlt zwei Higgsdarstellungen. Die $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$ koppelt an alle Fermionen. Ihre Kopplungsstrke nenne ich Y . Die Kopplungsstrke der Majorana-artigen $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ sei V_r . Die Eichkopplungen werden mit g_4 , g_l und g_r entsprechend den Symmetriegruppen bezeichnet. Die β -Funktionen ergeben sich schlielich als

$$\begin{aligned} 16\pi^2\beta^Y[Y, V_r, g_i] &= 2YY^+Y + \frac{11}{2}V_r^+V_rY + 4Y\text{Tr}(YY^+) \\ &\quad - Y\left(\frac{9}{4}g_l^2 + \frac{9}{4}g_r^2 + \frac{45}{4}g_4^2\right) \\ 16\pi^2\beta^{V_r}[Y, V_r, g_i] &= \frac{11}{2}V_rV_r^+V_r + \frac{11}{2}V_r^+V_rV_r + YY^+V_r + V_rYY^+ \\ &\quad + 2V_r\text{Tr}(V_rV_r^+) - V_r\left(\frac{9}{2}g_r^2 + \frac{45}{4}g_4^2\right) \end{aligned} \quad (4.14)$$

Fr die Eichkopplungen im Pati–Salam-Modell lauten die β -Funktionen [20, 21]

$$\begin{aligned}
16\pi^2\beta^{g_4}[g_4] &= \left(-\frac{44}{3} + \frac{4}{3}n_G + 3\right)g_4^3 \\
16\pi^2\beta^{g_l}[g_l] &= \left(-\frac{22}{3} + \frac{4}{3}n_G + \frac{1}{3}\right)g_l^3 \\
16\pi^2\beta^{g_r}[g_r] &= \left(-\frac{22}{3} + \frac{4}{3}n_G + \frac{42}{6}\right)g_r^3
\end{aligned} \tag{4.15}$$

n_G ist wieder die Anzahl der Generationen.

4.4.3 $SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$

Im LR-Modell koppeln Quarks und Leptonen unterschiedlich stark an die $(\mathbf{1}, \mathbf{2}, \mathbf{2})$. Die Kopplung der Quarks heit Q , die der Leptonen L . Die Kopplung an $(\mathbf{1}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$ heit analog zum PS-Modell V_r . Die Eichkopplungen werden mit g_3 , g_{B-L} , g_l und g_r entsprechend den Symmetriegruppen bezeichnet. Die β -Funktionen des LR-Modells lauten:

$$\begin{aligned}
16\pi^2\beta^Q[Q, L, V_r, g_i] &= 2QQ^+Q + Q\text{Tr}(3Q + L) \\
&\quad -Q\left(8g_3^2 + \frac{5}{4}g_l^2 + \frac{5}{4}g_r^2 + \frac{1}{3}g_{B-L}^2\right) \\
16\pi^2\beta^L[Q, L, V_r, g_i] &= 2LL^+L + \frac{5}{2}V_r^+V_rL + L\text{Tr}(3Q + L) \\
&\quad -L\left(\frac{5}{4}g_l^2 + \frac{5}{4}g_r^2 + 3g_{B-L}^2\right) \\
16\pi^2\beta^{V_r}[Q, L, V_r, g_i] &= \frac{5}{2}(V_rV_r^+V_r + V_r^+V_rV_r) + LL^+V_r + V_rLL^+ \\
&\quad + 2V_r\text{Tr}(V_r^+V_r) - V_r(18g_r^2 + 6g_{B-L}^2)
\end{aligned} \tag{4.16}$$

und für die Eichkopplungen:

$$\begin{aligned}
16\pi^2\beta^{g_3}[g_3] &= \left(-11 + \frac{4}{3}n_G\right)g_3^3 \\
16\pi^2\beta^{g_l}[g_l] &= \left(-\frac{22}{3} + \frac{4}{3}n_G + 1\right)g_l^3 \\
16\pi^2\beta^{g_r}[g_r] &= \left(-\frac{22}{3} + \frac{4}{3}n_G + \frac{1}{3}\right)g_r^3 \\
16\pi^2\beta^{g_{B-L}}[g_{B-L}] &= \left(\frac{4}{3}n_G + \frac{9}{6}\right)g_{B-L}^3
\end{aligned} \tag{4.17}$$

4.5 Strahlungskorrekturen

Die bisher beschriebenen Beziehungen zwischen den Yukawakopplungen beschreiben die Theorie unter der Annahme, daß die Yukawakopplungen stetig ineinander übergehen. Diese Annahme entspricht der Vorstellung, daß die

schweren Teilchen an der Skala, an der sie Masse erhalten, entkoppeln, d.h. die weitere Theorie nicht beeinflussen.

Wie bereits in Abschnitt 3.7 erwähnt, können die schweren Teilchen aber Beiträge liefern, die die Form von Eich- oder Yukawakopplungen der niedere-nergetischen Theorie haben. Solche Strahlungsbeiträge liefern dann Korrekturen zu den entsprechenden Kopplungen.

Die Schwelleneffekte der Eichkopplungen nach Gl. (3.21) entstehen aus Zwei-Schleifen-Rechnungen [31], sie sollen hier nicht berücksichtigt werden. Schwelleneffekte von Yukawakopplungen wurden bisher noch nicht allgemein berechnet.

Bereits zu Beginn der 80er Jahre wurde jedoch versucht, Strahlungskorrekturen der Yukawakopplungen zur Erklärung der Massenhierarchie zu verwenden [9, 10, 11, 12, 13, 15]. Die Idee, solche Korrekturen zu benutzen, um die Fermionmischungen zu erklären, stammt von Achiman [2]. Es wurde gezeigt, daß in dem beschriebenen E_6 -Modell Strahlungskorrekturen auftreten, welche relevante Beiträge zu den Fermionmassen und insbesondere zu den Fermionmischungen liefern [4, 5, 23, 22, 36].

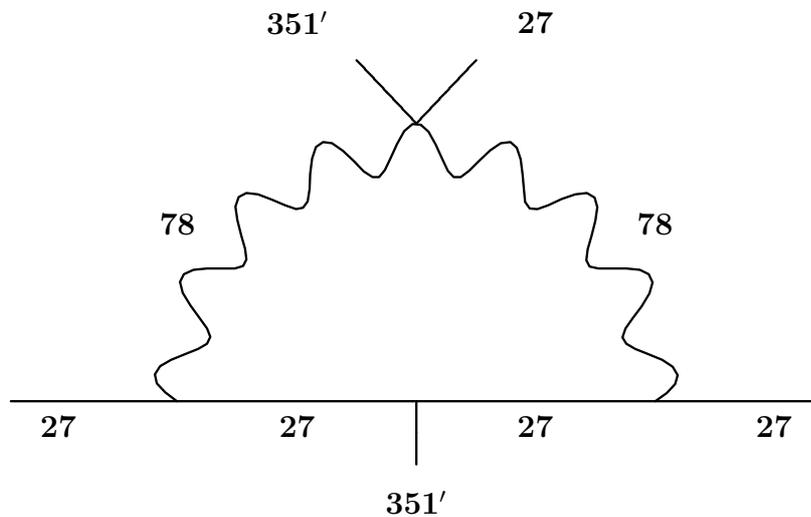


Abbildung 4.1: Strahlungskorrekturen zur Fermion-Higgs-Kopplung in E_6

Ich möchte nun beschreiben, wie diese Strahlungskorrekturen zu behandeln sind, falls man mit Yukawakopplungen statt mit Massen rechnet.

Die Strahlungskorrekturen, die hier berücksichtigt werden sollen, leiten sich aus dem Diagramm in Abb. 4.1 ab. Die erste Strahlungskorrektur ergibt sich bei der Brechung von E_6 nach $SO(10)$. Das innere Fermion wird dabei durch das $SO(10)$ -Singlett gebildet (Abb. 4.2). Dieses Fermion wird in der Literatur oft mit N bezeichnet. Es erhält den Vakuumerwartungs-

wert durch das $SO(10)$ -Singlett der $\mathbf{351}'$. Der gleiche Vakuumerwartungswert taucht auch an der Eichboson-Higgs-Kopplung auf. Da die inneren Teilchen des Diagramms in einer $SO(10)$ -Theorie schwer sind und somit bei der Brechung von E_6 ausintegriert werden, sieht dieses Diagramm wie eine einfache Fermion-Higgs-Kopplung aus. Es liefert also Beiträge zu der Kopplung des $\mathbf{10}$ -Higgs und damit zu allen Fermionmassen.

Eine zweite Strahlungskorrektur ergibt sich erst an der Brechungsschwelle der $B - L$ Symmetrie. Sie wird durch die rechtshändigen Neutrinos als inneres Fermion erzeugt (Abb. 4.3). Diese Kopplung ist nur für die u -artigen Quarks von Null verschieden, wie man erkennt, wenn man die Zerlegung der Darstellungen unter $SU(5)$ betrachtet [41]. Ihre Stärke ist entsprechend dem Kopplungsparameter der inneren Fermionen mit dem Vakuumerwartungswert proportional zur rechtshändigen Neutrinomasse.

Mit diesen beiden Strahlungskorrekturen lauten die Randbedingungen des Pati–Salam-Modells Gl. (4.4) nun

$$\begin{aligned}
Y^{PS}(M_{SO(10)}) &= Y^{SO(10)}(M_{SO(10)}) + S \\
V_r^{PS}(M_{SO(10)}) &= V_r^{SO(10)}(M_{SO(10)}) \\
\\
U^{SM}(M_{PS}) &= Y^{PS}(M_{PS}) + aV_r^{PS}(M_{PS}) \\
D^{SM}(M_{PS}) &= Y^{PS}(M_{PS}) \\
E^{SM}(M_{PS}) &= Y^{PS}(M_{PS}) \\
V^{SM}(M_{PS}) &= Y^{PS}(M_{PS}) \\
M_{\nu_R}(M_{PS}) &= v_r V_r^{PS}(M_{PS}) \quad . \quad (4.18)
\end{aligned}$$

Das Modell, welches diese Randbedingungen und die β -Funktionen aus (4.14) und (4.15) benutzt, werde ich später als strenges Pati–Salam-Modell bezeichnen.

Im LR-Modell können die Strahlungskorrekturen zu Quarks und Leptonen unterschiedlich sein. Die Gleichungen (4.5) lauten mit Strahlenkorrekturen deshalb:

$$\begin{aligned}
Q^{LR}(M_{SO(10)}) &= Y^{SO(10)}(M_{SO(10)}) + b_q S \\
L^{LR}(M_{SO(10)}) &= Y^{SO(10)}(M_{SO(10)}) + b_l S \\
V_r^{LR}(M_{SO(10)}) &= V_r^{SO(10)}(M_{SO(10)}) \\
\\
U^{SM}(M_{LR}) &= Q^{LR}(M_{LR}) + aV_r^{LR}(M_{LR}) \\
D^{SM}(M_{LR}) &= Q^{LR}(M_{LR}) \\
E^{SM}(M_{LR}) &= L^{LR}(M_{LR}) \\
V^{SM}(M_{LR}) &= L^{LR}(M_{LR}) \\
M_{\nu_R}(M_{LR}) &= v_r V_r^{LR}(M_{LR}) \quad (4.19)
\end{aligned}$$

mit komplexen Zahlen b_q und b_l .

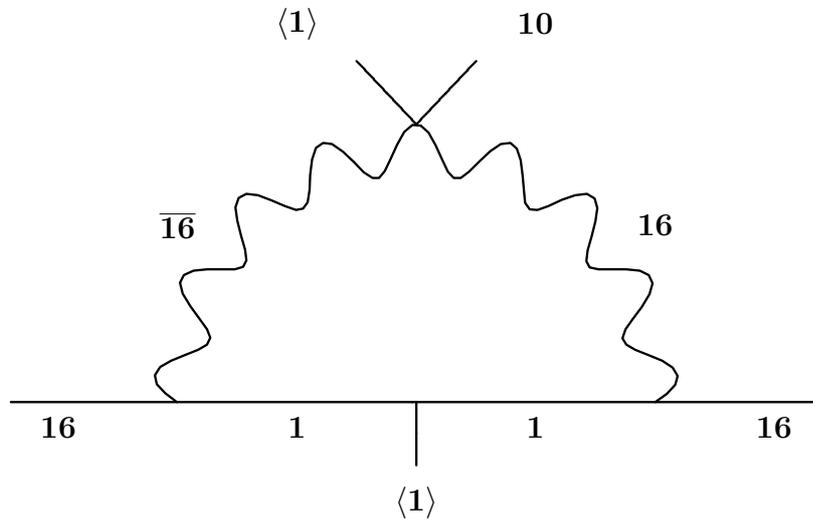


Abbildung 4.2: Strahlungskorrekturen zur Fermion-Higgs-Kopplung in $SO(10)$. Vakuumerwartungswerte sind durch spitze Klammern ($\langle \rangle$) gekennzeichnet

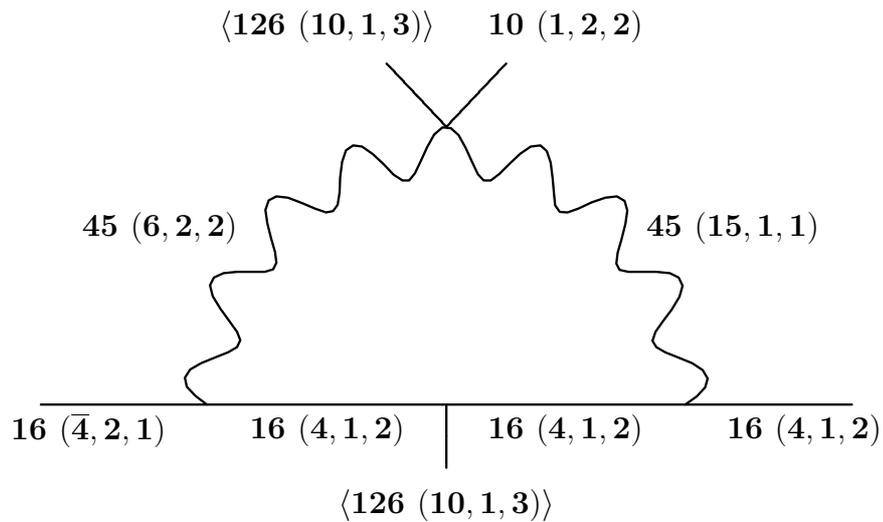


Abbildung 4.3: Strahlungskorrekturen zur Fermion-Higgs-Kopplung durch ν_r mit $SO(10)$ - und $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ -Darstellungen.

Die hier behandelten Strahlungskorrekturen durch die rechtshändigen Neutrinos bzw. das N entstehen aus derselben Higgskopplung, der $\mathbf{351}'$ (Abb. 4.1). Sie sollten deshalb proportional zueinander sein. Dies kann jedoch umgangen werden, indem man mehrere $\mathbf{351}'$ in der E_6 fordert [41, S. 50]. Deshalb werde ich in meinen Untersuchungen beide Strahlungskorrekturen als unabhängig betrachten.

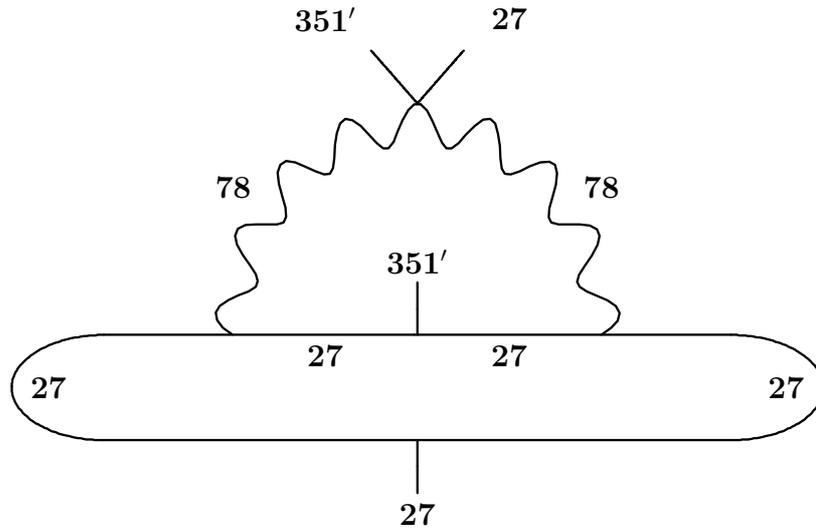


Abbildung 4.4: Zwei-Schleifen-Beitrag zur Higgs-Selbstkopplung in E_6

Eine attraktive Eigenschaft der beschriebenen Strahlungskorrekturen ist ihre Berechenbarkeit aus den fundamentalen Parametern der Theorie. Es gibt jedoch eine Schwierigkeit, die die Berechenbarkeit zerstören kann. Verändert man das Diagramm der Strahlungskorrektur, indem man die beiden äußeren Fermionlinien mit einer Higgskopplung verbindet, so erhält man einen Beitrag zur Higgs-Selbstkopplung (Abb. 4.4). Dieses Diagramm divergiert. Erlaubt man, daß dieses Diagramm in der Theorie vorkommt, so ist die Kopplungsstärke der $\mathbf{27}$ -Higgsdarstellung unbestimmt und muß im Experiment festgelegt werden. Da die Higgs-Selbstkopplung den Vakuumerwartungswert beeinflusst, sind auch die Massen der Fermionen nicht mehr berechenbar.

In Theorien mit mehreren Familien kann dieses Problem gelöst werden, indem man fordert, daß die Strahlungskorrekturen im Familienraum orthogonal zur Fermion-Higgs-Kopplung sind. Wählt man also die Fermion-Higgs-Kopplung Y diagonal, so müssen die Diagonalelemente der Strahlungskorrekturen S und V_r verschwinden. Auf diese Art soll auch in meinen Modellen erreicht werden, daß die Diagramme aus Abb. 4.4 verschwinden und die Berechenbarkeit erhalten bleibt.

Kapitel 5

Die numerische Analyse

Die im vorigen Kapitel beschriebenen Differentialgleichungen mit den Randbedingungen der verschiedenen Modelle können nur numerisch gelöst werden. Zu diesem Zweck habe ich ein Programmpaket entwickelt, mit dessen Hilfe die Parameterstze analysiert wurden, welche phänomenologisch zufriedenstellende Ergebnisse liefern.

5.1 Das Programm

Bei der Entwicklung des Programms sollte hohe Flexibilität bei geringer Fehleranfälligkeit im Vordergrund stehen. Es sollte leicht möglich sein, neue Renormierungsgruppengleichungen und Randbedingungen einzubinden, um mit der Entwicklung neuer physikalischer Modelle schritthalten zu können. Damit die Fehleranfälligkeit möglichst gering gehalten werden kann, sollte das Programm in Module zerlegt werden, welche einzeln getestet werden können. Die leichte Lesbarkeit von Matrixgleichungen im Programmtext reduziert die Wahrscheinlichkeit von Programmierfehlern weiter.

Bei der Realisierung habe ich mich für die Programmiersprache C++ entschieden [50]. Der objektorientierte Ansatz dieser Sprache ermöglicht die Definition von neuen Datentypen („Klassen“) und dazu gehörigen „Methoden“, d. h. Operationen oder Funktionen auf diesen Datentypen. Das Prinzip der Vererbung erlaubt es, „abgeleitete“ Klassen zu bilden, welche auf die Methoden der übergeordneten Klasse zurückgreifen können.

Diese objektorientierten Prinzipien kamen in meinem Programmpaket in zweifacher Hinsicht zur Anwendung. Erstens, um komplexe Zahlen und komplexe bzw. reelle Matrizen zu definieren und damit die gewohnte übersichtliche Schreibweise von Gleichungen mit Matrizen zu ermöglichen. Zweitens ermöglicht das Klassenprinzip die numerischen Methoden von den physikalischen Gleichungen zu trennen, so daß ein unabhängiges Testen möglich war.

Dazu wurde zunächst eine grundlegende Klasse Namens `Model1` geschrieben. Diese beinhaltet die numerische Methode zur Lösung der Renormierungsgruppengleichungen. Hier wurde ein schrittweisen gesteuerter Fünfte-Ordnung Runge-Kutta Algorithmus nach [47] für die Verwendung mit Matrizen ange-

pat. Dieses Verfahren variiert die Schrittweite so, daß der resultierende numerische Fehler kleiner als ein vorgegebenes ε bleibt. ε wurde dabei so gewählt, da die resultierenden Fehler kleiner als die der experimentellen Daten blieben.

Von der Klasse `Model1` wurden die Klassen `SM`, `SMVR`, `PS`, `PS5` und `LR` abgeleitet, welche die β -Funktionen der verschiedenen Modelle und die Randbedingungen für den Übergang von einem zum nächsten Modell definieren.

Mit den bisher beschriebenen Programmteilen können nun die verschiedenen Berechnungswege zusammengesetzt werden. Da die Zerlegung von Massen und Mischungen zu Yukawakopplungen nicht eindeutig ist, beginnt man bei der Vereinheitlichungsskala mit den dortigen Eich- und Yukawakopplungen. Von dort werden die Kopplungen mit den eben beschriebenen Methoden zur Skala M_Z entwickelt. Hier werden die Massen und Mischungen berechnet und mit den experimentellen Daten (Abschnitt 2.7) verglichen. Als Maß für die Güte der Lösung habe ich zwei verschiedene χ^2 -Funktionen gebildet:

$$\overline{\chi^2} := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \left(\frac{x_i^{\text{num}} - x_i^{\text{exp}}}{\Delta x_i^{\text{exp}}} \right)^2 \quad (5.1)$$

$$\chi_{\text{max}}^2 := \max_{i=1}^N \left(\frac{x_i^{\text{num}} - x_i^{\text{exp}}}{\Delta x_i^{\text{exp}}} \right)^2 \quad (5.2)$$

x_i^{num} und x_i^{exp} bezeichnen die numerischen bzw. experimentellen Gren, Δx_i^{exp} die Fehler der experimentellen Werte. N ist die Anzahl der Gren, die bewertet wurden. Für die später gezeigten Ergebnisse werden jeweils alle bekannten Fermionmassen, sowie die drei unteren nichtdiagonalen Elemente der CKM-Matrix bewertet. Die Bewertung von drei Elementen der CKM-Matrix ist in reellen Rechnungen ausreichend zur Festlegung der Matrix. Es wurden nichtdiagonale Elemente gewählt, da diese in der Nähe der phänomenologischen Werte stärker variieren. In komplexen Rechnungen müßte zusätzlich ein Parameter zur Festlegung der komplexen Phase aus (2.23) bewertet werden.

Die drei Eichkopplungen werden zur Bestimmung der Berechnungsskalen benutzt, ihr Startwert ist festgelegt. Die zu den Eichkopplungen gehörenden χ^2 sind daher konstant und werden nicht mit bewertet.

Um die Parameter zu optimieren, d. h. das jeweilige χ^2 zu minimieren, wird der mehrdimensionale Downhill Simplex Algorithmus von Nelder und Mead benutzt [47]. Die Parameter werden optimiert, bis entweder $\chi^2 < 0.01$ oder bis eine vorgegebene Anzahl von Schritten (zwischen 500 und 1000) erreicht ist.

Sind die Parameter auf diese Art festgelegt, so ergeben sich Aussagen über die experimentell nicht bekannten Größen Topmasse, Neutrinomassen und Neutrinomischungen.

Versuche mit den beiden Bewertungsfunktionen zeigen, daß bei Verwendung von $\overline{\chi^2}$ im allgemeinen schneller gute Ergebnisse gefunden werden, als mit χ_{max}^2 . Dies läßt sich darauf zurückführen, daß $\overline{\chi^2}$ Information über alle angepassten Größen enthält, während χ_{max}^2 nur die Information über eine Größe angibt.

In diesen Versuchen erwies es sich auch als sinnvoll, den Parameter $\tan \beta$ nicht durch das Programm anpassen zu lassen, sondern vorzugeben. Um Ergebnisse für verschiedenen Werte zu erhalten, wurde der gewünschte $\tan \beta$ -Bereich in einer Schleife mehrfach durchlaufen. Dabei wurden jeder neue Wert von $\tan \beta$ mit den zuletzt beim alten Wert gefundenen Parametern begonnen.

Alle Rechnungen wurden auf dem SUN-Workstation-Cluster der Theoretischen Physik in Wuppertal durchgeführt.

5.2 SMVR: Bis zur intermediären Skala

Zunächst wurde ein Modell untersucht, welches sich ausschließlich auf die Renormierungsgruppengleichungen des Standardmodells stützt.

Das SMVR-Modell beschreibt das Standardmodell mit zwei Higgs-Doublets und massiven rechtshändigen Neutrinos nach Abschnitt 3.1. Die Entwicklung der Eich- und Yukawakopplungen wird ab der intermediären Skala berücksichtigt. An dieser Skala kommen alle in Abschnitt 4.5 beschriebenen Strahlungskorrekturen zum Tragen.

Die Randbedingungen an der intermediären Skala M_I sind:

$$\begin{aligned}
 U^{SM}(M_I) &= Y + b_u S + V_r \\
 D^{SM}(M_I) &= Y + b_d S \\
 E^{SM}(M_I) &= Y + b_e S \\
 V^{SM}(M_I) &= Y + b_\nu S \\
 M_{\nu_r}(M_I) &= c V_r
 \end{aligned} \tag{5.3}$$

Y wurde diagonal gewählt, während die diagonalen Elemente von S und V_r verschwinden. Alle Rechnungen wurden mit reellen Kopplungen durchgeführt.

Die intermediäre Skala wurde zunächst mit $M_I = M_{PS} = 5.6 \cdot 10^{10}$ GeV so festgelegt, wie sie für das Zwei-Schleifen Pati-Salam-Modell benötigt wird (Tab. 3.2).

Die Startwerte der Eichkopplungen wurden so gewählt, daß sich bei der Skala $M_Z = 91$ GeV die experimentell bekannte Gren (Abschnitt 2.7) ergeben.

Mit den Faktoren b_i , $i = u, d, e, \nu$ wurde die Möglichkeit berücksichtigt, daß die Strahlungskorrekturen zu den verschiedenen Kopplungen unterschiedlich sind. Einer dieser Parameter kann eliminiert werden. Ich habe in meinen Rechnungen $b_d = 1$ gewählt.

5.2.1 Lösungen des Modells

Es werden verschiedene Werte für b_i untersucht. Am natürlichsten erscheint die Wahl $b_i = 1$, $i = u, d, e, \nu$, in der alle Teilchen die gleiche Strahlungskorrektur erhalten. Dies trägt der Herkunft aus der $SO(10)$ Rechnung, wo alle Teilchen der gleichen Darstellung angehören.

Für diesen Ansatz konnten jedoch keine befriedigenden Lösungen gefunden werden. Probleme bereiten die Massen der geladenen Leptonen bzw. der d -artigen Quarks. Der obige Ansatz (5.3) mit $b_d = b_e$ führt zu ähnlichen Massenverhältnissen zwischen den verschiedenen Familien der Leptonen bzw. der d -artigen Quarks:

$$\frac{m_b}{m_\tau} \approx \frac{m_s}{m_\mu} \approx \frac{m_d}{m_e} \quad . \quad (5.4)$$

Dies stimmt nicht mit den beobachteten Massen überein.

Nachdem oben b_d festgelegt wurde, ist b_e die einzige Möglichkeit, Abhilfe zu schaffen. Es zeigt sich, daß bereits geringfügig von 1 verschiedene Werte für b_e gute Resultate liefern. Läßt man den Wert von b_e durch das Programm anpassen, so stellt sich zunächst $b_e \simeq 0.84$ ein. Das Minimum dieser Lösung weist jedoch Topmassen auf, welche im Widerspruch zu den experimentellen Daten stehen.

Bessere Lösungen ergeben sich für $b_e \simeq -0.5$ (Abb. 5.1). Der zentrale Bereich ($\overline{\chi^2} < 0.01$) für die Topmassen dieser Lösungen ist (Abb. 5.2):

$$m_t(m_t) = 136..146 \text{ GeV} \quad .$$

Um die Skalenabhängigkeit des Modells zu untersuchen, wurde für M_{PS} auch der Ein-Schleifen-Wert nach Tab. 3.2 untersucht. Die Ergebnisse für $M_{PS} = 7.5 \cdot 10^{11} \text{ GeV}$ sind in den Abb. 5.3 dargestellt. Sie zeigen eine deutliche Verschiebung zu größerem $\tan \beta$. Gleichzeitig ist das Minimum schmaler geworden, so daß die Topmasse stärker begrenzt ist. Der zentrale Bereich der Topmasse liegt hier bei (Abb. 5.4):

$$m_t(m_t) = 163..166 \text{ GeV} \quad .$$

5.2.2 Mischungswinkel des Neutrino-sektors

Der Parameter b_ν beschreibt die Stärke der Strahlungskorrektur im Neutrino-sektor. Er geht in die Renormierungsgruppengleichungen der bekannten Massen nicht ein und ist deshalb in diesem Modell numerisch nicht festgelegt. Um den Einfluß von b_ν auf die Neutrinomassen und -mischungen zu untersuchen, werden vier Fälle unterschieden.

Zunächst der bereits erwähnte Fall $b_\nu = 1$, welcher durch das Pati-Salam-Modell motiviert wird. Dazu werden die Möglichkeiten $b_\nu = -1$ und $b_\nu = \tan^{-2} \beta$ betrachtet. Diese Werte entsprechen den Situationen, die A. Lukas in [41] betrachtet hat. Schließlich wird der Fall $b_\nu = b_l$ untersucht, welche aus einer Links-Rechts-Symmetrie $SU(3) \times SU(2) \times SU(2)$ entsteht.

Da V_r in diesem Modell nicht die Yukawakopplung, sondern die Strahlungskorrektur ist, enthält der Faktor c einerseits den Vakuumerwartungswert der $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$, andererseits auch die Stärke der Strahlungskorrektur. c kann durch die bekannten Massen nicht festgelegt werden.

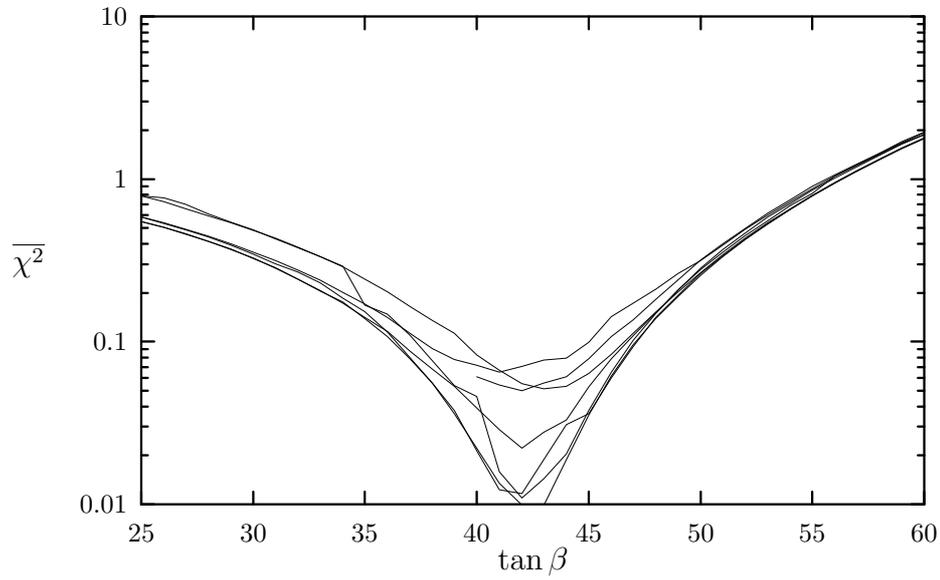


Abbildung 5.1: SMVR-Modell: $\overline{\chi^2}(\tan \beta)$, $M_I = 5.6 \cdot 10^{10}$ GeV

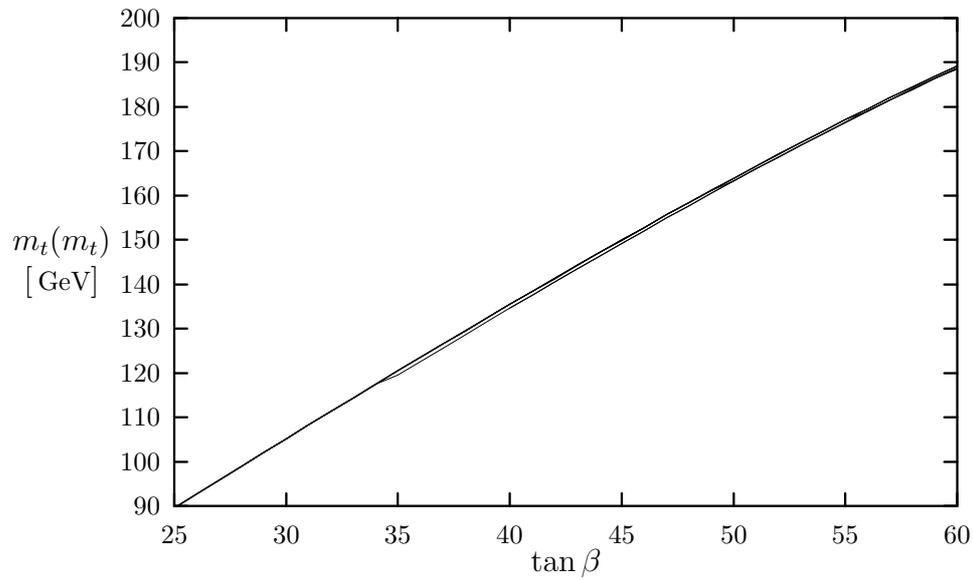


Abbildung 5.2: SMVR-Modell: t -Quark Masse in der Nähe des Minimums. $M_I = 5.6 \cdot 10^{10}$ GeV

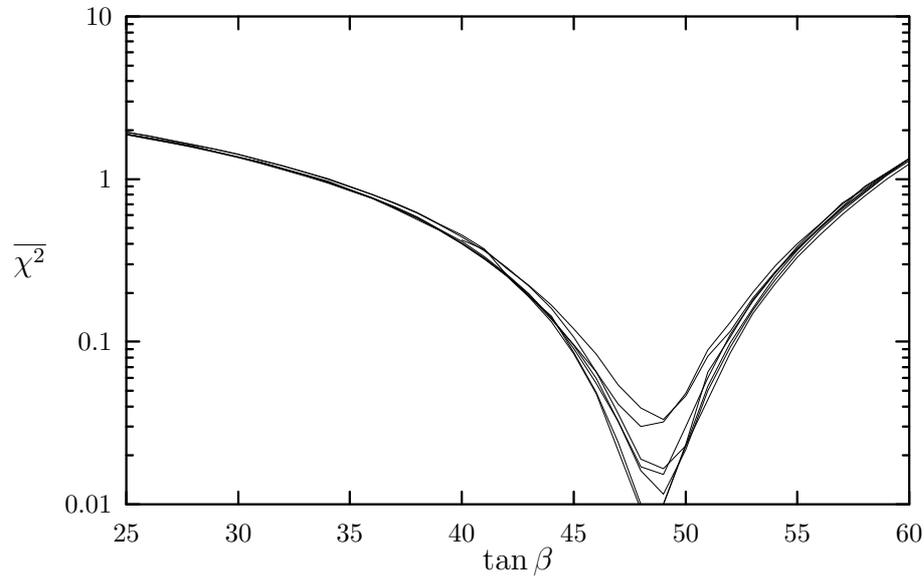


Abbildung 5.3: SMVR-Modell: $\overline{\chi^2}(\tan \beta)$, $M_I = 7.5 \cdot 10^{11}$ GeV

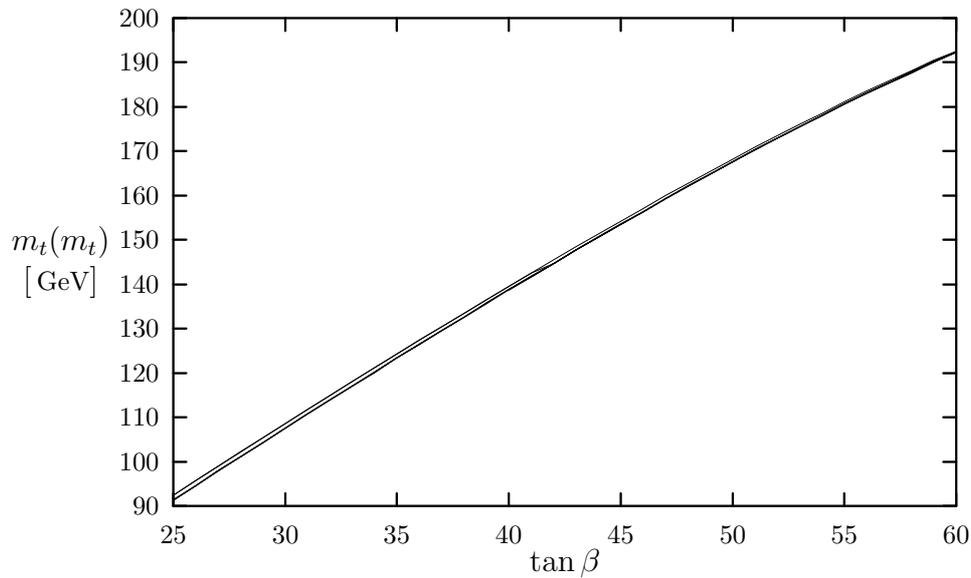


Abbildung 5.4: SMVR-Modell: t -Quark Masse in der Nähe des Minimums.
 $M_I = 7.5 \cdot 10^{11}$ GeV

Wegen dieses freien Proportionalitätsfaktors zwischen V_r und M_{ν_r} sind die Neutrinomassen in diesem Modell nicht festgelegt. Nur die Massenverhältnisse liegen fest. Fordert man jedoch $\Delta m_{e\mu}^2 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}^2$, wie es Abb. 2.1 entspricht, so erhält man eine Voraussage für $\Delta m_{\mu\tau}^2$.

Im folgenden wurde wieder $M_{PS} = 5.6 \cdot 10^{10} \text{ GeV}$ als intermediäre Skala benutzt.

1. Fall: $b_\nu = 1$

Die Abbildungen 5.5 und 5.6 zeigen die Resultate für den Fall $b_\nu = 1$. Es ist klar zu erkennen, daß die Mischungswinkel direkt von b_e abhängig sind. Die $e - \mu$ Mischung (in den Abbildungen durch Punkte dargestellt) ist groß für positive b_e , und klein bei negativen b_e . Die $\mu - \tau$ -Mischung (in den Abbildungen durch Kreuze gekennzeichnet) ist dagegen groß für negative b_e und klein für positive b_e .

Die untere Abbildung zeigt, daß für diesen Fall nur die kleinen $\mu - \tau$ -Mischungen mit den Experimenten verträglich sind. Diese Lösungen gehören zu $b_e > 0.4$. Eine Erklärung des atmosphärischen ν_μ -Defizits ist in diesem Fall nicht möglich. Die ν_τ -Masse $m_{\nu_\tau}^2 \simeq \Delta m_{\mu\tau}^2$ ist zu gering, um den geforderten Beitrag zur dunklen Materie im Universum zu liefern.

Die zugehörigen $e - \mu$ -Mischungen sind zum Teil nur wenig kleiner als die zur Erklärung des Sonnenneutrino-Problems benötigten Werte.

2. Fall: $b_\nu = -1$

Die Resultate für den Fall $b_\nu = -1$ sind in den Abbildungen 5.7 und 5.8 dargestellt.

Große $e - \mu$ -Mischungen gehören wieder zu positiven b_e . Für $b_e = 0.6$ ergeben sich Mischungen, wie sie zur Lösung des Sonnenneutrino-Problems erforderlich sind. Die zugehörigen $\mu - \tau$ -Mischungen liegen nur wenig niedriger.

Auch die Ergebnisse für $-0.5 < b_e < 0.1$ erlauben die Lösung des Sonnenneutrino-Problems, diesmal jedoch mit kleinen Mischungen $\sin^2(2\theta_{e\mu}) \approx 0.01$. Die $\mu - \tau$ -Mischungen sind im Bereich $-0.4 < b_e < 0.1$ größer 0.1, für $b_e < -0.4$ sinken sie unter diesen Wert.

Die Darstellung $\Delta m_{\mu\tau}^2$ gegen $\sin^2(2\theta_{\mu\tau})$ ergibt keine weiteren Einschränkungen: Alle Lösungen sind mit den bisherigen Experimenten zur $\mu - \tau$ -Mischung in Einklang. Es gibt ein paar Lösungen die das ν_μ -Defizit erklären könnten, aber der Hauptteil der Lösungen hat zu niedriges $\Delta m_{\mu\tau}^2$ oder zu kleine Mischungen. In diesem Fall ist die ν_τ -Masse zu klein, um einen entscheidenden Beitrag zur dunklen Materie zu liefern.

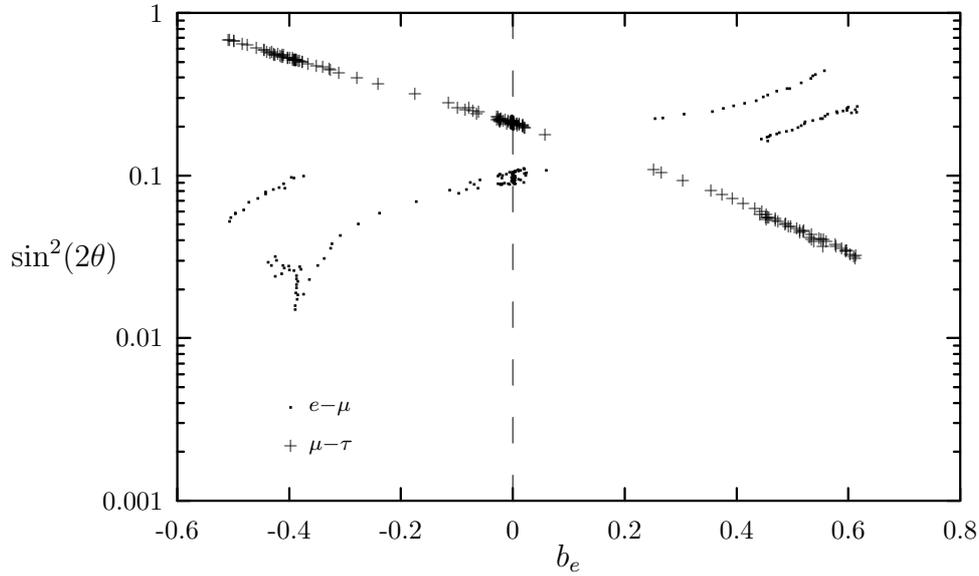


Abbildung 5.5: SMVR-Modell: Mischungswinkel des Neutrinossektors für $b_\nu = 1$. Alle Werte gehören zu Ergebnissen mit $\overline{\chi^2} < 0.5$.

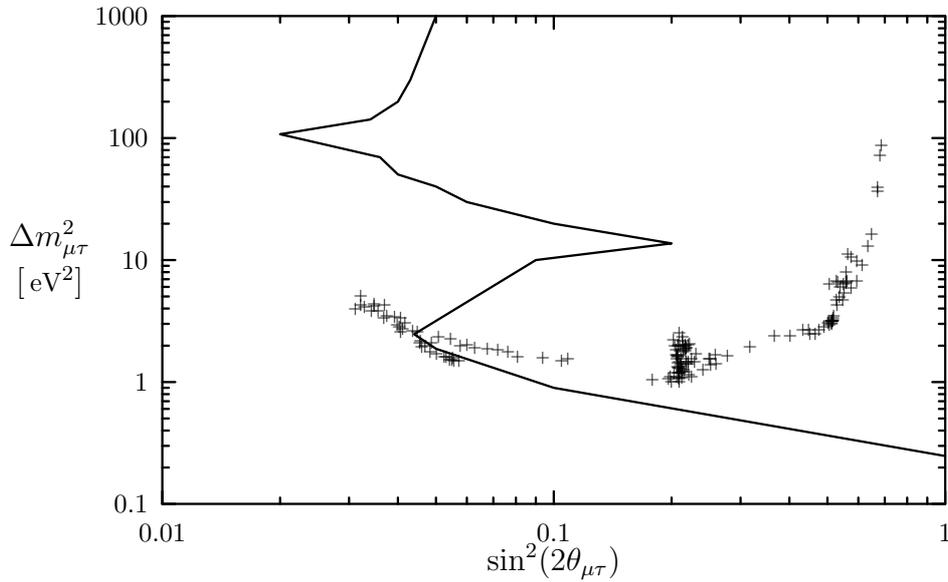


Abbildung 5.6: SMVR-Modell: Mischungswinkel des Neutrinossektors für $b_\nu = 1$, $\overline{\chi^2} < 0.5$ und $\Delta m_{e\mu}^2 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}^2$. Bereiche rechts der geschlossenen Linie sind experimentell ausgeschlossen [24].

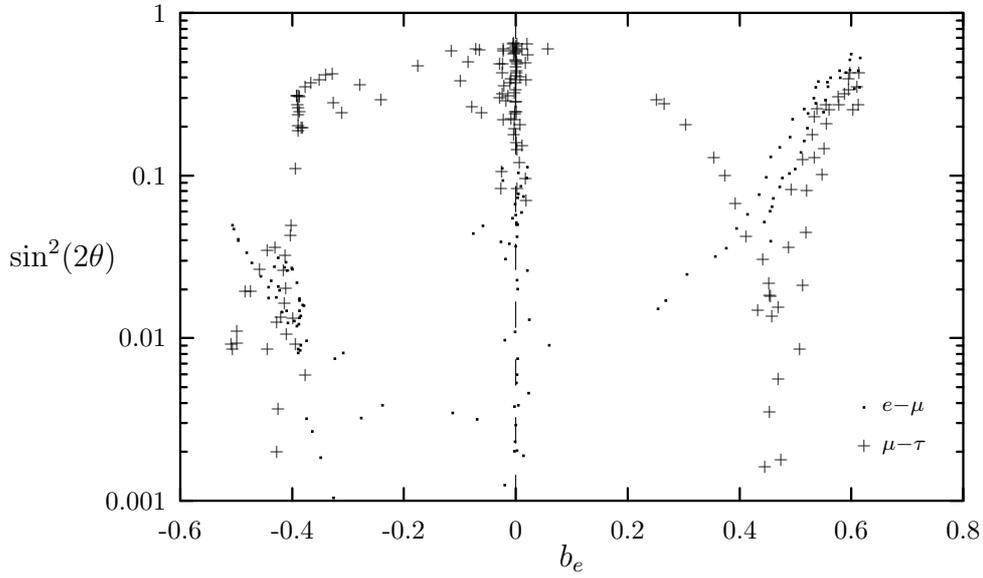


Abbildung 5.7: SMVR-Modell: Mischungswinkel des Neutrinosektors für $b_\nu = -1$, $\chi^2 < 0.5$.

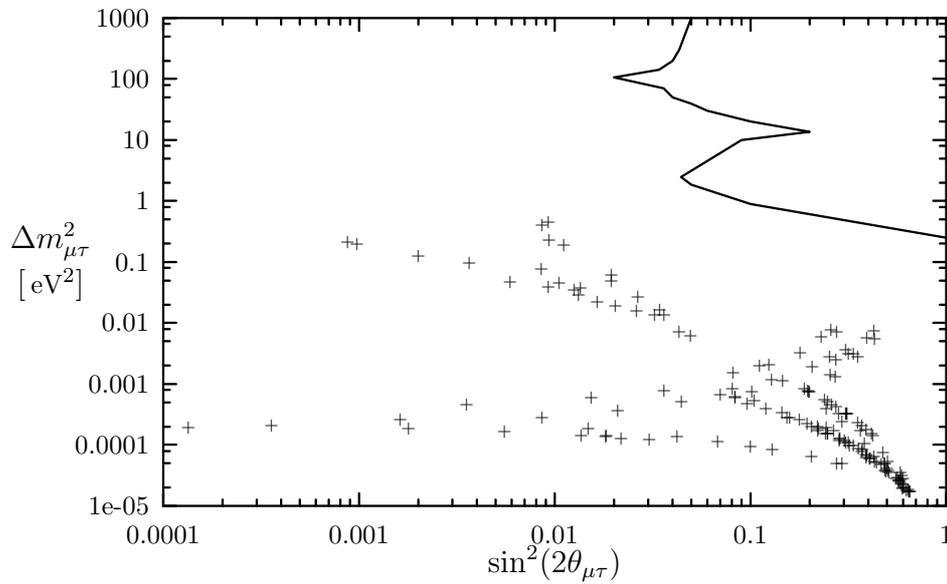


Abbildung 5.8: SMVR-Modell: Mischungswinkel des Neutrinosektors für $b_\nu = -1$, $\chi^2 < 0.5$ und $\Delta m_{e\mu}^2 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}^2$. Bereiche rechts der geschlossenen Linie sind experimentell ausgeschlossen [24].

3. Fall: $b_\nu = \tan^{-2} \beta$

Der Fall $b_\nu = \tan^{-2} \beta$ erlaubt nur große $e - \mu$ -Mischungen: $\sin^2(2\theta_{e\mu}) > 0.95$.

Die $\mu - \tau$ -Mischungen variieren jedoch stark (Abb. 5.9 und 5.10). Dieses Modell weist große Massenverhältnisse zwischen Myon- und Tauneutrinos auf, was zu großen $\Delta m_{\mu\tau}^2$ führt. In diesem Bereich sind nur kleine Mischungen $\sin^2(2\theta_{\mu\tau}) < 0.01$ mit den Experimenten verträglich. Auch ist keine Erklärung des atmosphärischen Neutrino Defizits möglich. Die Kreuze im erlaubten Bereich (links der geschlossenen Linie in Abb. 5.10) gehören zu $b_e > 0.2$. Die zugehörigen ν_τ -Massen haben die richtige Größenordnung, um den geforderten Beitrag zur dunklen Materie im Universum zu leisten.

4. Fall: $b_\nu = b_e$

Die Ergebnisse für $b_\nu = b_e$ sind in den Abbildungen 5.11 und 5.12 dargestellt.

Die $e - \mu$ -Mischungen sind bei $b_e = 0.6$ klein ($\sin^2(2\theta_{e\mu}) \approx 0.003$). Mit kleiner werdendem b_e steigt die Mischung. Für b_e nahe 0 erreicht sie knapp 1, um dann für negative b_e wieder abzufallen. Für $b_e < 0.2$ wird die Entwicklung uneinheitlich. Hier treten Mischungen zwischen 0.001 und 0.3 auf.

Die $\mu - \tau$ -Mischungen sind für $b_e > 0.2$ und $b_e < -0.1$ größer als die $e - \mu$ -Mischungen. Im Bereich $-0.1 < b_e < 0.2$ ist es umgekehrt.

Bei dieser Parameterwahl weist $\Delta m_{\mu\tau}^2$ eine große Variation auf. Die Abbildung 5.12 zeigt eine Serie von Punkten bei $\Delta m_{\mu\tau}^2 \approx 0.1 \text{ eV}^2$. Diese lassen sich wegen der kleinen Mischung den Lösungen mit $b_e > 0.2$ zuordnen. Ebenso läßt sich die Ansammlung bei $\Delta m_{\mu\tau}^2 \approx 0.001 \text{ eV}^2$ über die großen Mischungen den b_e Werten bei -0.4 zuordnen. Diese Lösungen besitzen die richtigen Werte, um das Defizit an atmosphärischen ν_μ zu erklären. Die Neutrinos können in diesem Modell allerdings nicht benutzt werden, um die fehlende Masse im Universum zu erklären, da Lösungen mit m_{ν_τ} wegen zu großer Mischungen nicht mit den Neutrinoexperimenten verträglich sind.

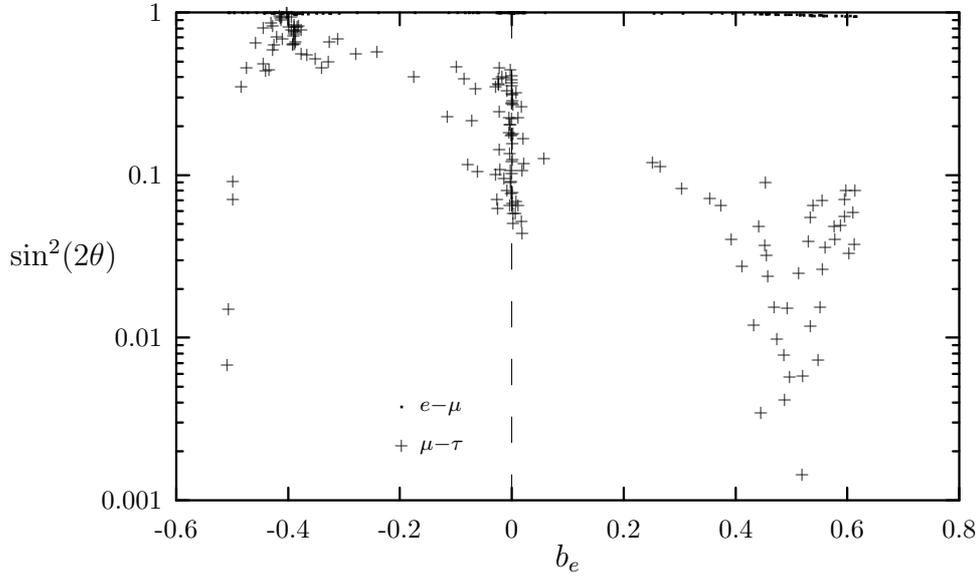


Abbildung 5.9: SMVR-Modell: Mischungswinkel des Neutrinosektors für $b_\nu = \tan^{-2}(\beta)$, $\overline{\chi^2} < 0.5$.

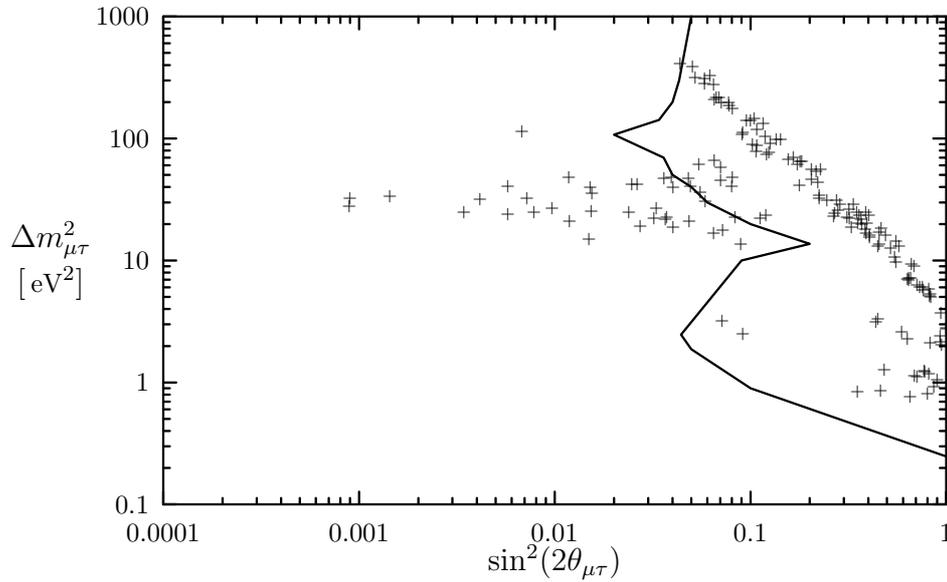


Abbildung 5.10: SMVR-Modell: Mischungswinkel des Neutrinosektors für $b_\nu = \tan^{-2}(\beta)$, $\overline{\chi^2} < 0.5$ und $\Delta m_{e\mu}^2 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}^2$. Bereiche rechts der geschlossenen Linie sind experimentell ausgeschlossen [24].

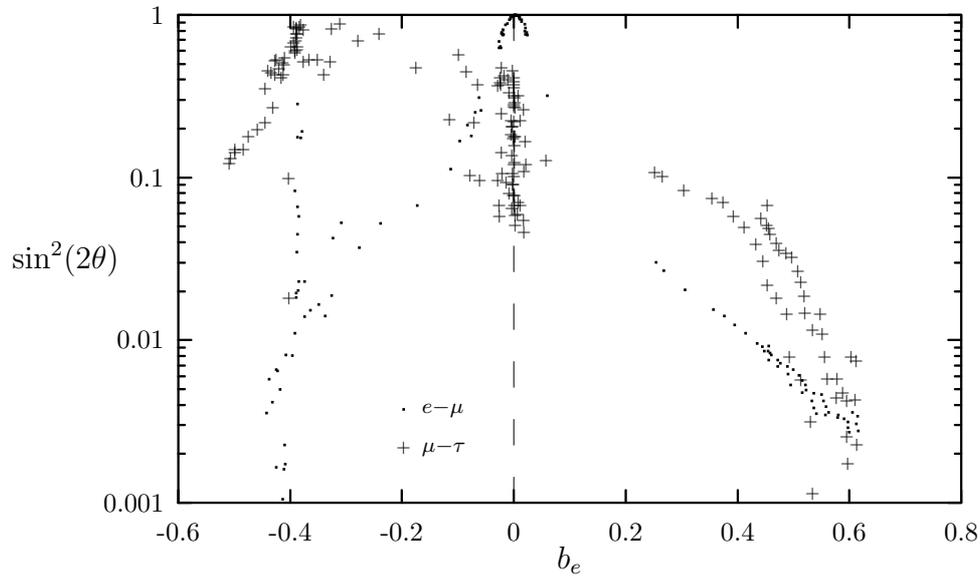


Abbildung 5.11: SMVR-Modell: Mischungswinkel des Neutrinossektors für $b_\nu = b_e$, $\chi^2 < 0.5$.

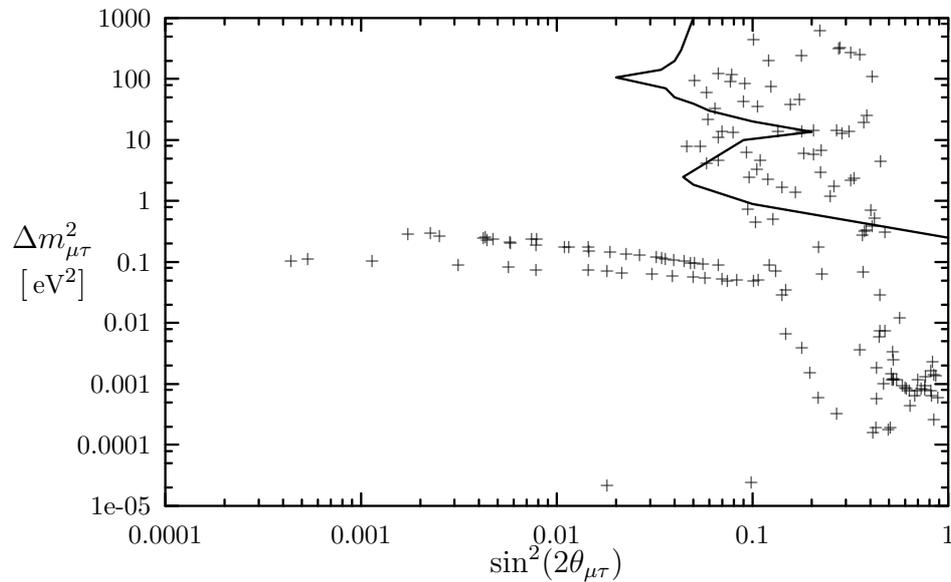


Abbildung 5.12: SMVR-Modell: Mischungswinkel des Neutrinossektors für $b_\nu = b_e$, $\chi^2 < 0.5$ und $\Delta m_{e\mu}^2 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}^2$. Bereiche rechts der geschlossenen Linie sind experimentell ausgeschlossen [24].

5.3 PS: Das strenge Pati–Salam-Modell

Das PS-Modell ist das strenge Pati–Salam-Modell nach Abschnitt 3.5. Die Yukawakopplungen werden ab der Skala $M_{SU(10)}$ entwickelt. Die Randbedingungen sind durch Gl. (4.18) gegeben. $Y^{SO(10)}(M_{SO(10)}) = Y$ wird diagonal gewählt. Die Diagonalelemente von $V_r^{SO(10)}(M_{SO(10)}) = V_r$ und S verschwinden wieder. Auch hier wurde mit reellen Yukawakopplungen gerechnet.

In diesem Modell haben die Leptonen und die d -artigen Quarks an der intermediären Skala wieder die gleichen Yukawakopplungen. Wie daher zu erwarten ist, können auch für dieses Modell keine Lösungen gefunden werden. ($\overline{\chi^2} > 10$).

Die Ergebnisse mit minimalem $\overline{\chi^2}$ zeigen jedoch Neutrinomischungen, wie sie zur Erklärung des Sonnenneutrino-Problems benötigt werden.

Daher habe ich ein Modell entwickelt, welches Abweichungen von der strengen Symmetrie in den Yukawakopplungen erlaubt.

5.4 PS5: Das variierte Pati–Salam-Modell

Mit dem PS5-Modell soll untersucht werden, ob es möglich ist, durch kleine Abweichungen von der PS-Symmetrie zu zufriedenstellenden Lösungen zu kommen. Gleichzeitig soll das Modell dabei Hinweise liefern, welche Symmetrie geeignete Lösungen liefern könnte.

Das Modell enthält auch oberhalb der intermediären Skala verschiedene Yukawakopplungen für u -artige und d -artige Quarks, sowie für geladene und ungeladene Leptonen. Sie werden ebenso wie im SM mit U , D , E und V bezeichnet. Dazu enthält das Modell die schon aus dem PS-Modell bekannte Kopplung V_r .

Um die Rechnungen ohne zusätzliche Vorarbeit durchführen zu können, wurden die β -Funktionen des neuen Modells durch die β -Funktionen des strengen Modells definiert:

$$\begin{aligned}
 \beta_{\text{PS5}}^U [U, V_r, g_i] &:= \beta_{\text{PS}}^Y [U, V_r, g_i] \\
 \beta_{\text{PS5}}^D [D, V_r, g_i] &:= \beta_{\text{PS}}^Y [D, V_r, g_i] \\
 \beta_{\text{PS5}}^E [E, V_r, g_i] &:= \beta_{\text{PS}}^Y [E, V_r, g_i] \\
 \beta_{\text{PS5}}^V [V, V_r, g_i] &:= \beta_{\text{PS}}^Y [V, V_r, g_i] \\
 \beta_{\text{PS5}}^{V_r} [V, V_r, g_i] &:= \beta_{\text{PS}}^{V_r} [V, V_r, g_i] \quad , \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

mit $\beta_{\text{PS}}^{V_r}$ und β_{PS}^Y aus Gl. (4.14). Für einen Grenzwert, in dem die Kopplungen U , D , E und V gleich sind, erhält man so wieder das strenge Modell.

Die Randbedingungen des Modells werden (genau wie bei SMVR) so gewählt, daß die Strahlungskorrekturen zu den verschiedenen Kopplungen unterschiedlich sein können:

$$\begin{aligned}
U^{PS5}(M_{SO(10)}) &= Y + b_u S \\
D^{PS5}(M_{SO(10)}) &= Y + b_d S \\
E^{PS5}(M_{SO(10)}) &= Y + b_e S \\
V^{PS5}(M_{SO(10)}) &= Y + b_\nu S \\
V_r^{PS5}(M_{SO(10)}) &= V_r
\end{aligned} \tag{5.6}$$

$$\begin{aligned}
U^{SM}(M_{PS}) &= U^{PS5}(M_{PS}) + a V_r^{PS5}(M_{PS}) \\
D^{SM}(M_{PS}) &= D^{PS5}(M_{PS}) \\
E^{SM}(M_{PS}) &= E^{PS5}(M_{PS}) \\
V^{SM}(M_{PS}) &= V^{PS5}(M_{PS}) \\
M_{\nu_r}(M_{PS}) &= v_r V_r^{PS5}(M_{PS})
\end{aligned} \tag{5.7}$$

Y ist eine diagonale Matrix, die Diagonalelemente S und V_r verschwinden. Y , S und V_r sind reell. Auch die Faktoren b_i , $i = u, d, e, \nu$ sind reell. Wie schon zuvor wird $b_d = 1$ gewählt. Der Grenzübergang, bei dem das strenge Modell erreicht wird, ist somit $b_u, b_e, b_\nu \rightarrow 1$. Als intermediäre Skala wird der Zwei-Schleifen Wert aus Tab. 3.2 benutzt:

$$M_{PS} = 5.6 \cdot 10^{10} \text{ GeV} \quad . \tag{5.8}$$

5.4.1 Lösungen des Modells

Für das PS5-Modell werden zwei Arten von Parametersätzen untersucht: $b_\nu = 1$ und $b_\nu = b_e$. Der Parameter b_u wurde immer auf 1 gesetzt.

Für beide Situationen können zufriedenstellende Lösungen bei zwei verschiedenen Werten von $\tan \beta$ gefunden werden. Diese zwei Lösungen sind in den Abbildungen 5.13 und 5.15 mit I und II markiert.

Lsung I hat ihr Minimum jeweils bei $\tan \beta = 41$. Die resultierende Topmasse ist $m_t(m_t) = 143 \text{ GeV}$. Mit $b_e \simeq 0.8$ kommen diese Lösungen dem strengen PS-Modell am nächsten.

Lsung II weicht wesentlich stärker vom strengen Modell ab. b_e variiert zwischen -0.5 und 0.5 , wobei die kleinen bzw. negativen Werte sogar bevorzugt scheinen. Die Topmasse ergibt sich aus diesem Minimum zu $m_t(m_t) = 168 \text{ GeV}$.

Die genannten Werte für die Topmasse geben den Wert für minimales χ^2 wieder. Mit den phänomenologischen Daten sind jedoch alle Ergebnisse, die $\chi^2 < 1$ aufweisen, in Einklang. Aus diesen Berechnungen ergeben sich für Lösung I: $m_t(m_t) < 181 \text{ GeV}$ und für Lösung II: $134 < m_t(m_t) < 189 \text{ GeV}$.

Es fällt auf, daß die Wahl $b_\nu = b_e$ (Abb. 5.15) wesentlich bessere Lösungen erlaubt, als die Wahl $b_\nu = 1$ (Abb. 5.13). Da jedoch Breite und Form der Minima für $\overline{\chi^2}$ in beiden Situationen gleich ist, müssen die Ergebnisse als gleich gut angesehen werden.

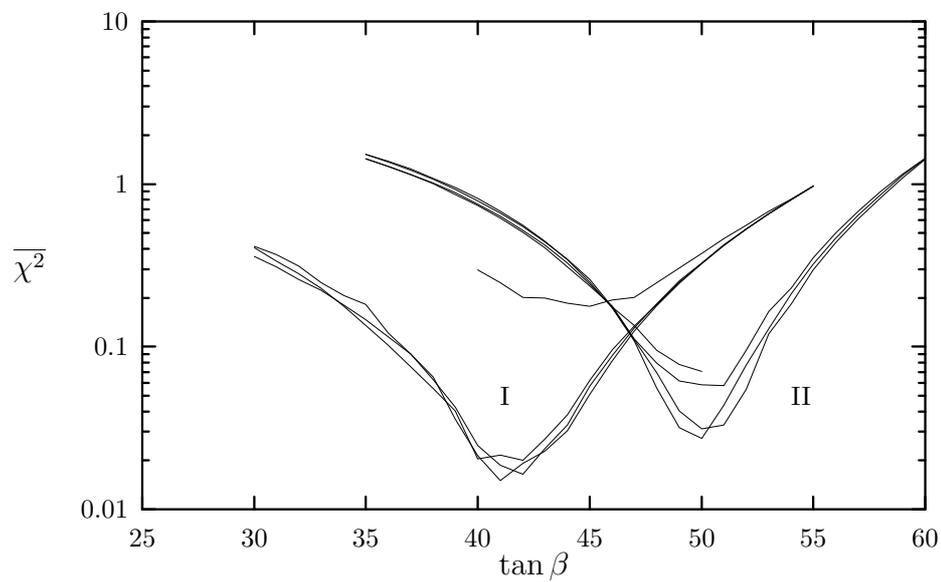


Abbildung 5.13: PS5-Modell: $\overline{\chi^2}(\tan \beta)$ für $b_\nu = 1$

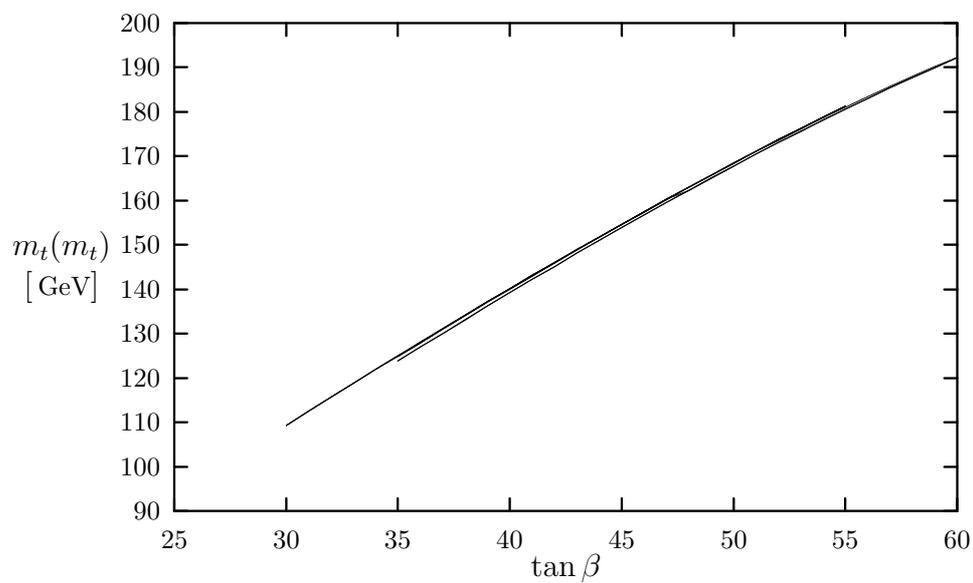


Abbildung 5.14: PS5-Modell: t -Quark Massen in den gezeigten Lösungen für $b_\nu = 1$.

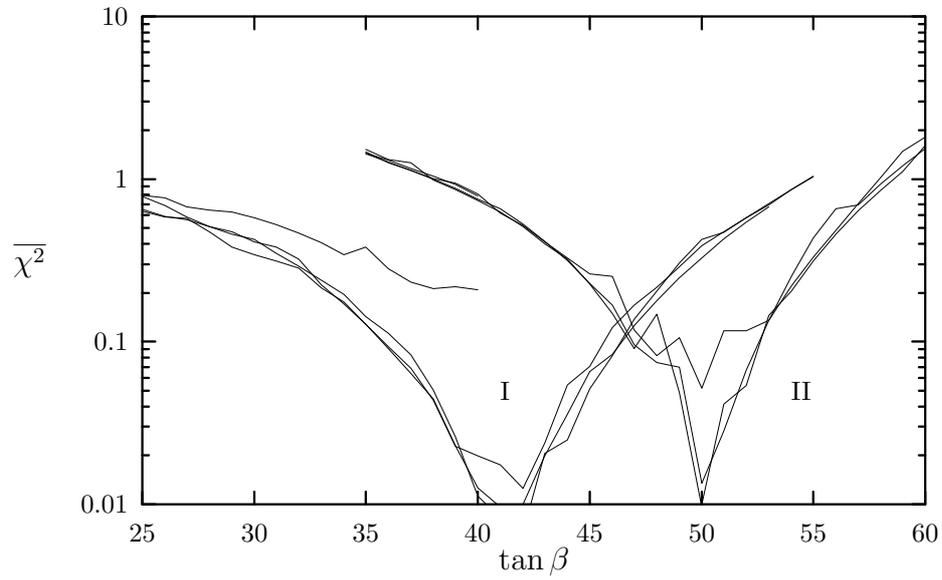


Abbildung 5.15: PS5-Modell: $\overline{\chi^2}(\tan \beta)$ für $b_\nu = b_e$.

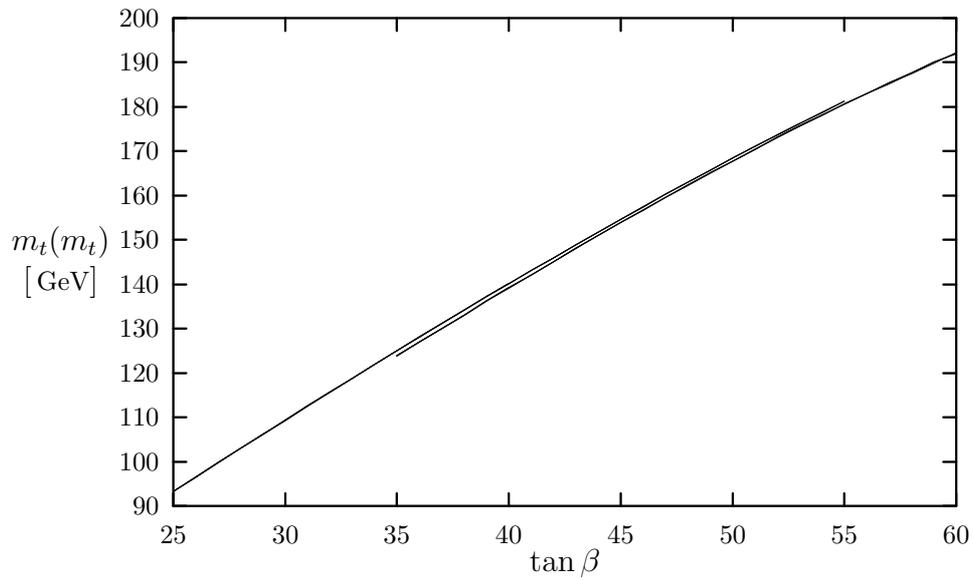


Abbildung 5.16: PS5-Modell: t -Quark Massen in den gezeigten Lösungen für $b_\nu = b_e$.

5.4.2 Mischungswinkel des Neutrinosektors

62. Der Faktor v_r ist in diesem Modell der Vakuumerwartungswert der $(\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3})$:

$$v_r = \langle (\mathbf{10}, \mathbf{1}, \mathbf{3}) \rangle \sim M_{PS} \quad (5.9)$$

Obwohl der Faktor zwischen V_r und M_{ν_r} nun festgelegt ist, sind die Neutrinomassen des Modells nicht eindeutig bestimmt, denn der Faktor a , welcher die Größe der Strahlungskorrektur beschreibt, kann durch das Modell nicht bestimmt werden. Somit ist auch die absolute Größe der Yukawakopplung V_r nicht festgelegt. Erst die zusätzliche Festlegung $\Delta m_{e\mu}^2 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}^2$ nach Abb. 2.1 ergibt wieder eine Voraussage für $\Delta m_{\mu\tau}^2$.

Wie bereits erwähnt, lassen sich die zwei Minima an ihren b_e -Werten unterscheiden. Auch die Neutrinomischungen der Lösungen sind unterschiedlich.

1. Fall: $b_\nu = 1$

Für $b_\nu = 1$ sind die $e - \mu$ -Mischungen in beiden Fällen außerhalb der zur Lösung des Sonnenneutrinoproblems geforderten Bereiche (Abb. 5.17). Die $\mu - \tau$ -Mischungen dagegen liegen für $b_e \simeq 0.8$ so, daß man erwarten kann, sie in den nächsten Experimenten (insbes. P860) zu beobachten. Auch für $b_e < 0.5$ gibt es $\mu - \tau$ -Mischungen, die erst in zukünftigen Experimenten beobachtbar wären, wobei das Gros der Werte bereits ausgeschlossen ist (Abb. 5.18).

Es gibt einige ν_τ -Massen, die den geforderten Beitrag der Neutrinos zur dunklen Materie leisten. Die meisten Lösungen liefern jedoch kleinere m_{ν_τ} .

2. Fall: $b_\nu = b_e$

Auch für den Fall $b_\nu = b_e$ lassen sich Mischungswinkel anhand der b_e -Werte zu den beiden Lösungen zuordnen. Während $\sin^2(2\theta_{e\mu})$ für $b_e \simeq 0.8$ wieder zwischen den beiden möglichen Bereichen (Abb. 2.1) liegt, liefert das andere Minimum ($\tan \beta \simeq 50$) Werte zwischen 0.008 und 1. Für $b_e \in [-0.1; 0.1]$ ergeben sich große, für $b_e \simeq -0.4$ kleine $\sin^2(2\theta_{e\mu})$ (Abb. 5.19).

Die $\mu - \tau$ -Mischungen liegen in beiden Fällen außerhalb der bisher beobachtbaren Bereiche (Abb. 5.20). Für $b_e \simeq -0.4$ ist eine Erklärung des atmosphärischen ν_μ -Defizits möglich. Bei den meisten Lösungen ist die Masse des ν_τ zu klein, um einen Beitrag zur dunklen Materie zu liefern. Nur bei wenigen Lösungen erreicht m_{ν_τ} die richtige Größenordnung.

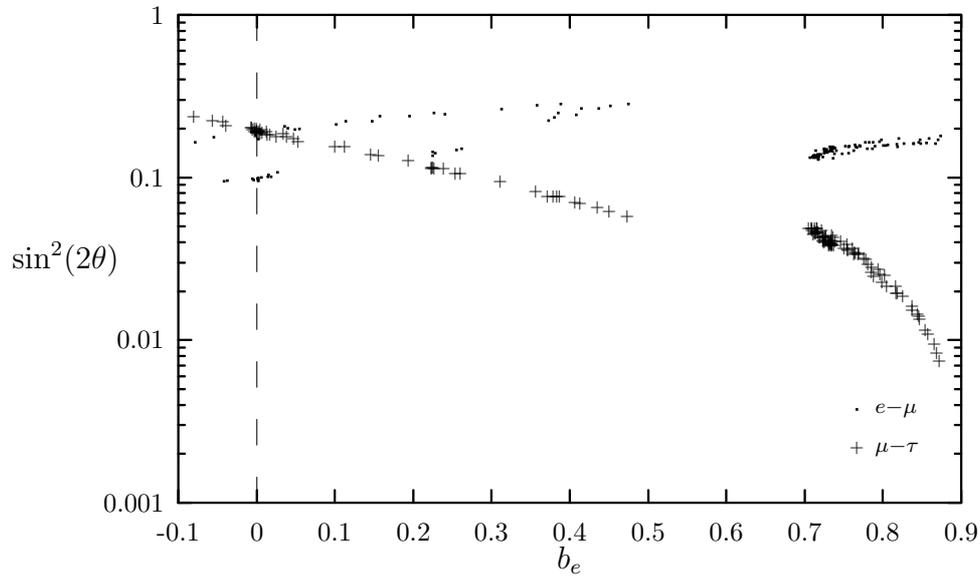


Abbildung 5.17: PS5-Modell: Mischungswinkel des Neutrinossektors für $b_\nu = 1$, $\overline{\chi^2} < 0.5$.

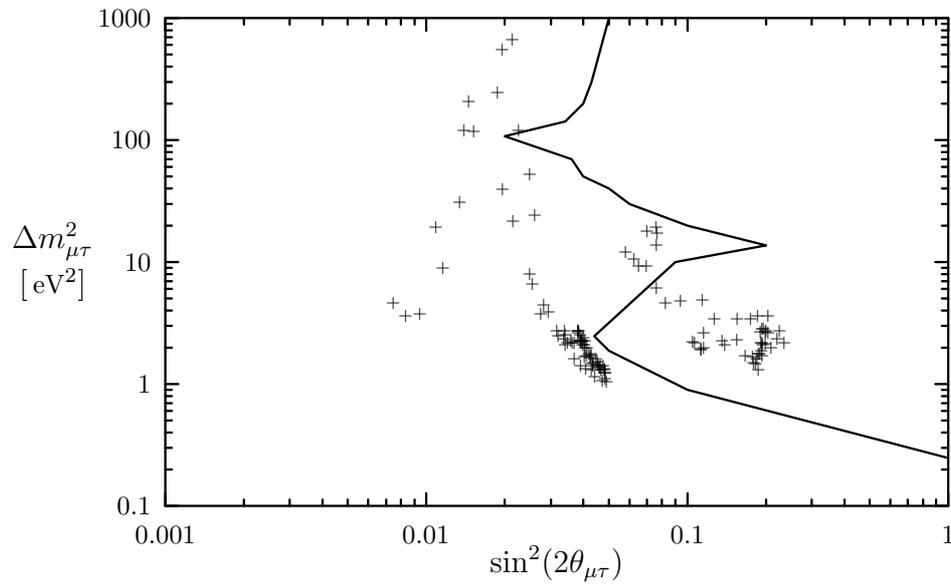


Abbildung 5.18: PS5-Modell: Mischungswinkel des Neutrinossektors für $b_\nu = 1$, $\overline{\chi^2} < 0.5$ und $\Delta m_{e\mu}^2 = 9 \cdot 10^{-6} \text{ eV}^2$. Bereiche rechts der geschlossenen Linie sind experimentell ausgeschlossen [24].

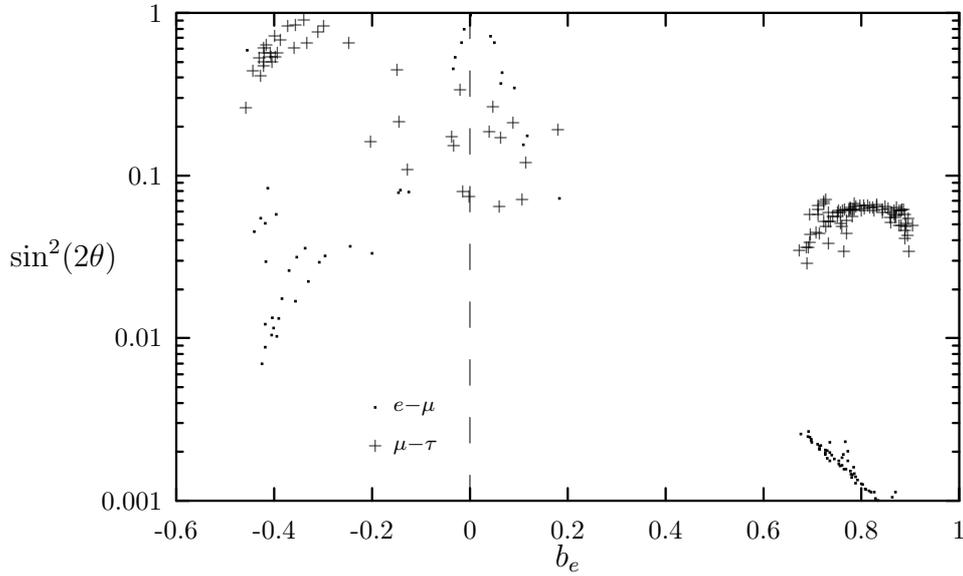


Abbildung 5.19: PS5-Modell: Mischungswinkel des Neutrinossektors für $b_\nu = b_e$, $\overline{\chi^2} < 0.5$.

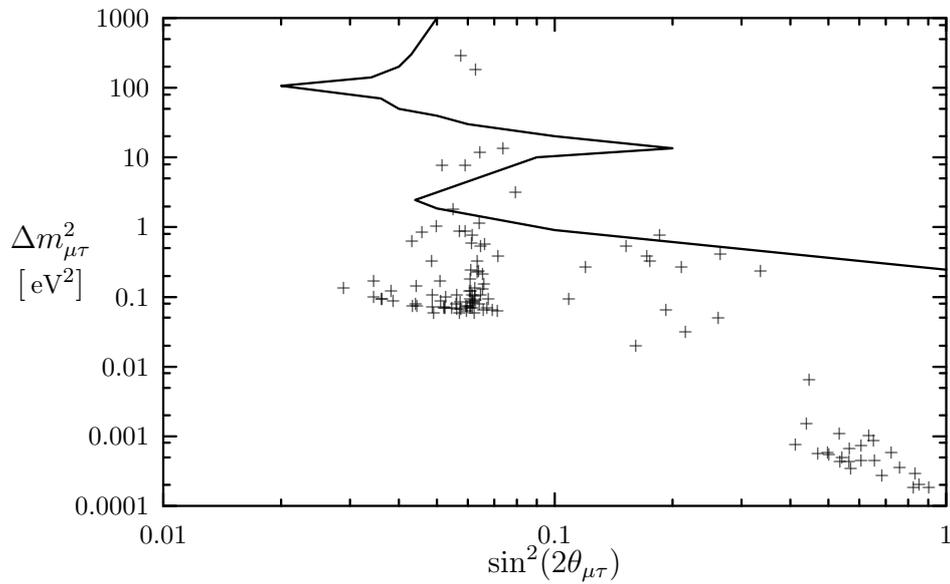


Abbildung 5.20: PS5-Modell: Mischungswinkel des Neutrinossektors für $b_\nu = b_e$, $\overline{\chi^2} < 0.5$ und $\Delta m_{e\mu}^2 = 9 \cdot 10^{-6}$ eV². Bereiche rechts der geschlossenen Linie sind experimentell ausgeschlossen [24].

5.4.3 Grenzen für den Parameter a

Der Parameter a beschreibt die Stärke der Strahlungskorrektur, welche die Yukawakopplung U^{SM} durch die rechtshändigen Neutrinos erfährt.

Obwohl der Parameter a durch das Modell nicht festgelegt werden kann, sind die Ergebnisse von a abhängig. Je kleiner a gewählt wird, desto größer wird die Yukawakopplung V_r . Diese wiederum beeinflusst über die β -Funktionen die Kopplungen der Fermionen.

Die untere Grenze von a ergibt sich daraus, daß die Renormierungsgruppengleichungen divergente Lösungen haben, falls die Yukawakopplungen zu groß sind.

Um die Abhängigkeit der Lösungen von a zu bestimmen, wurde der Fall $b_\nu = b_e$ für vorgegebene Werte von a untersucht. Begonnen wurde mit $a = 1$. Für jeden Wert von a wurde $\tan \beta$ mehrmals durchlaufen. Anschließend wurde der Wert von a halbiert.

In Abb. 5.21 ist die Abhängigkeit $\overline{\chi^2}$ von $\tan \beta$ für $a < 1$ dargestellt. Man erkennt, daß mit kleinerem a die Lösungen allmählich schlechter werden. Der Bereich $\overline{\chi^2} < 1$ reicht bis $a = 0.01$, wählt man (wie bisher) $\overline{\chi^2} < 0.5$, so ergibt sich $a > 0.02$.

Bei $a = 0.004$ brach das Programm die Suche ab, da divergente Yukawakopplungen auftraten.

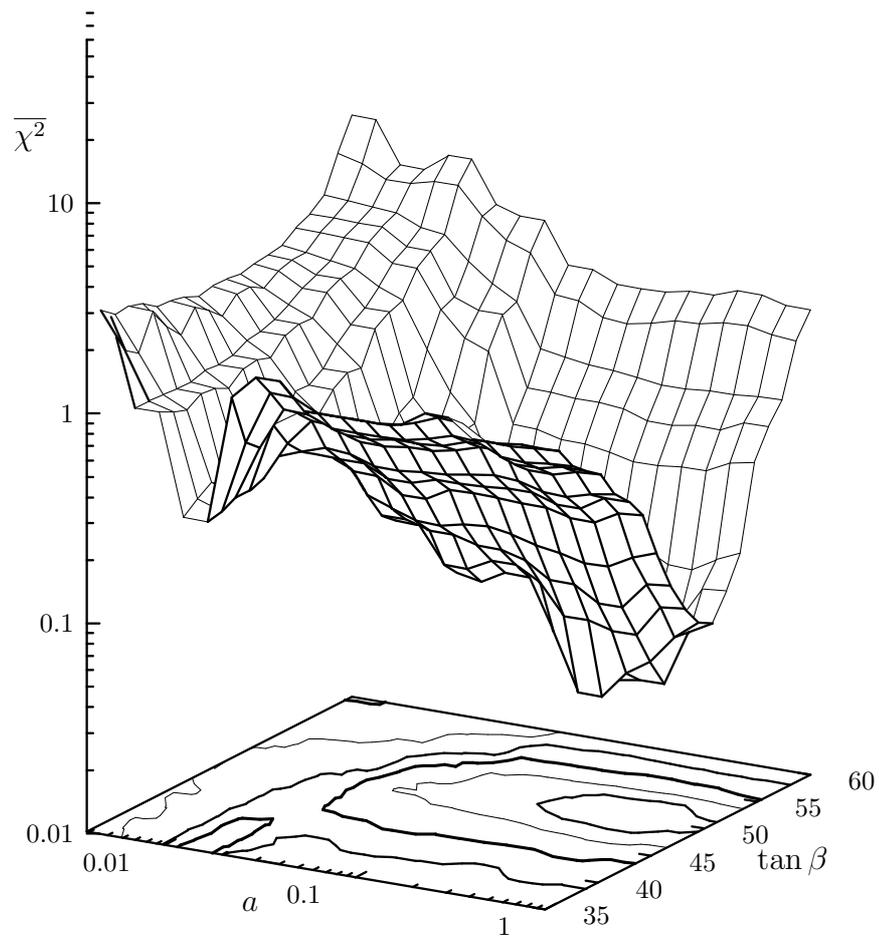


Abbildung 5.21: PS5-Modell: $\overline{\chi^2}(\tan \beta, a)$ für $b_\nu = b_e$. Auf der Grundfläche sind Linien mit $\overline{\chi^2} = 0.1, 0.2, 0.5, 1$ und 5 eingezeichnet.

5.5 LR: Das linksrechtssymmetrische Modell

Der Fall $b_\nu = b_e$ des PS5-Modells liefert interessante Neutrinomischungen. Er entspricht einer Symmetrie, in der Quarks und Leptonen unterschiedlichen Darstellungen angehören.

Das LR-Modell ist aus der Hoffnung entstanden, da die für PS5 gefundenen Lösungen sich auf die Symmetrie $SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$ bertragen lassen und da es damit eine Begründung für die Annahme $b_\nu = b_e$ liefert.

Die Randbedingungen sind durch Gl. (4.19) gegeben. Der Faktor b_q kann auf 1 festgelegt werden, ohne die numerischen Ergebnisse zu ändern.

Leider konnten bisher für dieses Modell keine Lösungen gefunden werden, die alle bekannten Massen und Mischungen korrekt wiedergeben. Die gefundenen Lösungen mußten eine oder mehrere der Massen der ersten Familie vernachlässigen. Auffällig an diesen Teilergebnissen ist, daß alle Neutrinomischungen sehr klein sind ($\sin^2(2\theta) \ll 10^{-4}$).

Ob dies eine Eigenschaft des Modells ist, oder nur die bisher untersuchten Parameterbereiche diese Eigenschaft haben ist noch offen.

Kapitel 6

Zusammenfassung und Ausblick

Es gibt viel zu tun ...

In dieser Arbeit wurden im Rahmen der E_6 -GUT mit zweistufigem Brechungsschema aus einem physikalisch motivierten Massenmodell Voraussagen über Topmasse und Neutrino parameter gewonnen.

Im Gegensatz zu vorangegangenen Arbeiten über das benutzte Massenmodell wurde dabei der Einfluß der Renormierungsgruppengleichungen vollständig berücksichtigt. Dazu mußten die Korrekturen zu ursprünglich diagonalen Massenmatrizen in Korrekturen zu ursprünglich diagonalen Yukawakopplungen übersetzt werden. Gleichzeitig mußte die Skala, an der die Yukawakopplungen zu korrigieren sind, bestimmt werden.

Die freien Parameter des Modells sind die Yukawakopplungen bei GUT-Energie. Sie können festgelegt werden, indem gefordert wird, daß die Lösung der Renormierungsgruppengleichungen des Modells zu experimentell beobachteten Massen und Mischungen führen. Da die analytische Lösung der Renormierungsgruppengleichungen nicht möglich ist, wurde ein numerisches Verfahren zur Lösung von Differentialgleichungen für die Verwendung von Matrizen angepaßt und in der Sprache C++ implementiert.

Dieses Programm wurde für drei verschiedene GUT-Modelle durchgeführt:

1. Ein allgemeines Szenario mit intermediärer Skala, aber ohne Festlegung der intermediären Symmetrie (SMVR-Modell).
2. Ein Modell, welches die Pati-Salam-Gruppe $SU(4) \times SU(2) \times SU(2)$ als intermediäre Symmetrie benutzt.
3. Das LR-Modell, in dem $SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$ als intermediäre Eichgruppe Verwendung findet.

Solange die intermediäre Symmetrie nicht festgelegt ist, enthalten die Randbedingungen zusätzliche Freiheiten. So sind im SMVR-Modell die Stärken der Strahlungskorrektur zu den verschiedenen Yukawakopplungen

unabhängig und die Größe der Majorana-Massen der Neutrinos ist nicht festgelegt.

Um aus diesem Modell Voraussagen gewinnen zu können, wurden Annahmen über diese freien, aus dem Modell selbst nicht bestimmbar Parameter gemacht. Zwei der untersuchten Annahmen entsprechen Sonderfällen aus der Diplomarbeit von André Lukas [41] und beruhen auf einem Brechungsweg, der die $SU(5)$ als Symmetriegruppe enthält. Die anderen beiden Annahmen ergeben sich aus Symmetrieüberlegungen bezüglich der im Kapitel 3 vorgestellten intermediären Eichgruppen.

Alle untersuchten Situationen führen zur gleichen Voraussage für die Topmasse. Sie ist mit den indirekten Messungen zur Topmasse in Einklang, zeigt aber eine starke Skalenabhängigkeit.

Die Neutrinomischungen sind dagegen von den gewählten Annahmen stark abhängig. Ihre Skalenabhängigkeit scheint nicht so groß, wurde aber nicht systematisch untersucht.

Für das Pati–Salam-Modell ergaben sich, wie bereits im unspezifischen ersten Modell abzusehen, keine befriedigenden Lösungen. Um Abhilfe zu schaffen, wurde ein Modell mit gelockerter Symmetrie entworfen, mit dem der Einfluß der Renormierungsgruppengleichungen oberhalb der intermediären Skala untersucht werden konnte. Die gefundenen Lösungen zeigen eine Verschiebung zu größeren $\tan \beta$ und damit zu größeren Topmassen im Vergleich zum ersten Modell. Die Neutrinomischungen sind wiederum stark von den frei wählbaren Parametern des Modells abhängig.

Das LR-Modell ist der Versuch, die im abgewandelten Pati–Salam-Modell gewonnenen Erkenntnisse in ein mathematisch konsistentes Modell umzusetzen. Die intermediäre Eichsymmetrie $SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2)$ fordert für Quarks und Leptonen jeweils gleiche Kopplungen, eine Situation, die im allgemeinen Modell interessante Ergebnisse lieferte. Leider konnten im LR-Modell bisher keine befriedigenden Lösungen gefunden werden.

Die weiterführende Untersuchung dieses Modells erscheint mir besonders interessant, da es nicht nur ein physikalisch motiviertes Massenmodell enthält, sondern auch den vollständigen Weg der Symmetriebrechung berücksichtigt. Zunächst ist eine systematische Untersuchung der Parameterbereiche des Modells notwendig, um eine befriedigende Lösung zu finden. Dabei sollte auch die Abhängigkeit von der intermediären Skala eingebracht werden. Es ist durchaus denkbar, daß nur für bestimmte Skalen Lösungen möglich sind.

Eine andere mögliche Erweiterung dieser Arbeit besteht in der Verwendung anderer Brechungsschemata. Hier bieten sich vor allem mehrstufige Brechungswegen an, wie z.B. $SO(10) \longrightarrow SU(4) \times SU(2) \times SU(2) \longrightarrow SU(3) \times U(1) \times SU(2) \times SU(2) \longrightarrow SM$. Um eine erste Vorstellung vom Einfluß der Renormierungsgruppe zu gewinnen, kann auch für solche Szenarien das SMVR-Modell mit speziellen Annahmen benutzt werden.

Die Erweiterung des Massenmodells auf supersymmetrische Theorien ist ebenfalls denkbar. Supersymmetrische GUTs sind in mehrfacher Hinsicht

interessant. Zum einen erlaubt Supersymmetrie eine Vereinheitlichung ohne weitere Zwischenskala. (Diese Modelle sind allerdings nicht interessant, falls man massive Neutrinos zur Erklärung des Sonnenneutrinoproblems oder als dunkle Materie heranziehen will, da eine Zwischenskala bei $10^{10} \dots 10^{12}$ GeV notwendig ist, um die benötigten leichten Neutrinomassen zu erhalten.)

Dazu kann in supersymmetrischen GUTs das Hierarchie-Problem gelöst werden, welches allen GUTs gemeinsam ist. Schließlich ist die Quantisierung der Gravitation bisher nur mit supersymmetrischen Theorien möglich. Supersymmetrie erscheint damit als ein weiterer Schritt in Richtung auf eine umfassende Theorie der Kräfte.

Die letzte mögliche Erweiterung, die ich erwähnen möchte, ist die Komplexifizierung der Yukawakopplungen. In dieser Arbeit wurden alle Yukawakopplungen als reell angenommen. Prinzipiell können diese Kopplungen jedoch komplex sein. Die Beobachtung der CP-Verletzung in der schwachen Wechselwirkung zeigt, daß in der Natur tatsächlich komplexe Phasen auftreten. Die Komplexifizierung des Massenmodells zielt also letztendlich auf ein Verständnis der CP-Verletzung.

Insgesamt erlaubt die Einbeziehung der Renormierungsgruppengleichungen in die Analyse genauere Aussagen über die Konsequenzen von Massenmodellen. Gleichzeitig entsteht eine Vielzahl von Variationsmöglichkeiten dadurch, daß die Brechungswege der benutzten vereinheitlichten Theorien festgelegt werden müssen.

Literaturverzeichnis

- [1] Y. Achiman. Topless bottom decays and E_6 . *Physics Letters B*, 97(3,4):376–382, 1980.
- [2] Y. Achiman. Cabbibo mixings and radiative corrections. *Physics Letters B*, 131(4,5,6):362–366, 1983.
- [3] Y. Achiman. Radiatively induced KM mixing and superstring inspired models. *Physics Letters B*, 187(3,4):309–315, 1987.
- [4] Y. Achiman, J. Erler und W. Kalau. Fermionic mass matrices with large neutrino mixing in a GUT Scenario. *Nuclear Physics B*, 331:213–243, 1990.
- [5] Y. Achiman und A. Lukas. Heavy top in an E_6 model for fermionic masses and mixing. *Nuclear Physics B*, 384:78–100, 1992.
- [6] B. Ananthanarayan und Q. Shafi. Zeroing In On the Top Quark, LSP and Scalar Higgs Masses. BA-93-25, PRL-TH-93/6, hep-ph/9311225, 1993.
- [7] H. Arason, D. Castaño, B. Keszthelyi, S. Mikaelian, E. J. Piard, P. Ramond und B. Wright. Renormalization Group Study of the Standard Model and its Extensions: I. The Standard Model. HEP-91-33, 1992.
- [8] K. S. Babu, C. N. Leung und J. Pantaleone. Renormalization of the Neutrino Mass Operator. IUHET-252, UDHEP-93-03, BA-93-44, 1993.
- [9] R. Barbieri und D. V. Nanopoulos. An exceptional model for grand unification. *Physics Letters B*, 91(3,4):369–375, 1980.
- [10] R. Barbieri und D. V. Nanopoulos. Hierarchical fermion masses from grand unification. *Physics Letters B*, 95(1):43–46, 1980.
- [11] R. Barbieri, D. V. Nanopoulos und D. Wyler. Hierarchical fermion masses in $SU(5)$. *Physics Letters B*, 103(6):433–436, 1981.
- [12] S. M. Barr. Light-fermion mass hierarchy and grand unification. *Physics Review D*, 21(5):1424–1427, 1980.

- [13] S. M. Barr. SO(10) model of fermion masses. *Physics Review D*, 24(7):1895–1899, 1981.
- [14] S. M. Bilenky. Neutrino mixing. DFTT 67/92, hep-ph/9212247, 1992.
- [15] M. J. Bowick und P. Ramond. Calculable masses in grand unified theories. *Physics Letters B*, 103:338–342, 1981.
- [16] A. J. Buras, J. Ellis, M. K. Gaillard und D. V. Nanopoulos. Aspects of the Grand Unification of Strong, Weak and Electromagnetic Interactions. *Nuclear Physics B*, 135:66–92, 1978.
- [17] D. O. Caldwell und R. N. Mohapatra. Neutrino Mass Explanations of Solar and Atmospheric Neutrino Deficits and Hot Dark Matter. UCSB-HEP-93-03, UMD-PP-93-166, 1993.
- [18] P. H. Chankowski und Z. Pluciennik. Renormalization Group Equations for Seesaw Neutrino Masses. ZU-TH 20/93, DFPD 93/TH/44, 1993.
- [19] C. de Clerc. Electroweak Results from LEP. Vortrag gehalten in Moriond: XXVIIIth Recontres de Moriond, Elektroweak Interactions and Unified Theories, 1993.
- [20] N. G. Deshpande, E. Keith und P. B. Pal. Implications of LEP results for SO(10) grandunification with two intermediate stages. OITS-488, 1992.
- [21] N. G. Deshpande, E. Keith und P. B. Pal. Implications of the CERN LEP results for SO(10) grandunification. *Physical Review D*, 46(5):2261–2264, 1992.
- [22] A. Dippel. Phänomenologie in einem Quark-Massen Modell mit einer hermiteschen Massenmatrix. Diplomarbeit, BUGH Wuppertal, 1988. WU D 88-29.
- [23] J. Erler. Strahlungskorrekturen als Ursache für Quarkflavormischung. Diplomarbeit, BUGH Wuppertal, 1988. WU D 88-25.
- [24] Fermilab. P860 Proposal. June, 1993.
- [25] H. Fritsch und P. Minkowski. Unified Interactions of Leptons and Hadrons. *Annals of Physics*, 193:193–266, 1975.
- [26] J. Gasser und H. Leutwyler. Quark Masses. *Physics Reports*, 87(3):77–169, 1982.
- [27] H. Georgi. The state of the art – gauge theories. In C. E. Carlson, (Hrsg.), *Proceedings of the American Institute of Physics*, 1974.

- [28] H. Georgi und S. L. Glashow. Unity of All Elementary-Particle Forces. *Physical Review Letters*, 32(8):438–441, 1974.
- [29] N. Gray. *Dimensionally Regulated On-Shell Renormalization in QCD and QED*. Doktorarbeit, Open University, Milton Keynes, UK, 1991. OUT-4102-35.
- [30] T. Greiner. Untersuchung von supersymmetrischen Grand-Unified-Theorien mit Hilfe der Renormierungsgruppen-Gleichungen. Diplomarbeit, BUGH Wuppertal, 1993. WU D 93-16.
- [31] L. Hall. Grand Unification of Effective Gauge Theories. *Nuclear Physics B*, 178:75–124, 1981.
- [32] J. A. Harvey, D. B. Reiss und P. Ramond. Mass relations and Neutrino Oscillations in an SO(10)-Model. *Nuclear Physics B*, 199:223–268, 1982.
- [33] N. Hata und P. Langacker. The Earth Effect in the MSW Analysis of the Solar Neutrino Experiments. UPR-0570T, 1993.
- [34] N. Hata und P. Langacker. The Updated MSW Analysis and the Standard Solar Model Uncertainties. UPR-0581T, 1993.
- [35] G. 't Hooft und M. Veltman. Regularization and Renormalization of Gauge Fields. *Nuclear Physics B*, 44:189, 1972.
- [36] W. Kalau. Strahlungskorrekturen als Ursache für Leptonflavourmischung. Diplomarbeit, BUGH Wuppertal, 1988. WU D 88-28.
- [37] L. Krauss, E. Gates und M. White. Solar Neutrino Data, Solar Model Uncertainties and Neutrino Oscillations. *Physics Letters B*, 299:94, 1993.
- [38] P. Langacker. Grand Unified Theories and Proton Decay. *Physics Reports*, 72(4), 1981.
- [39] P. Langacker. Proton Decay. UPR-0539T, 1993.
- [40] P. Langacker. Solar Neutrinos. UPR-0552T, 1993.
- [41] A. Lukas. Fermionmassen und -mischungen durch Strahlenkorrekturen in einer E_6 -GUT. Diplomarbeit, BUGH Wuppertal, 1991. WU B 91-28.
- [42] M. E. Machacek und M. T. Vaughn. Two-Loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory (I). *Nuclear Physics B*, 222:83–103, 1983.
- [43] M. E. Machacek und M. T. Vaughn. Two-Loop Renormalization Group Equations in a General Quantum Field Theory (II). *Nuclear Physics B*, 236:221–232, 1983.

- [44] R. N. Mohapatra. Minimal SO(10) grand unification: predictions for proton decay an neutrino masses and mixings. hep-ph/9310265, 1993.
- [45] Particle Data Group. Review of particle properties. *Physical Review D*, 45(11), 1992.
- [46] S. T. Petcov und A. Y. Smirnov. Neutrinoless double decay and the solar neutrino problem. SISSA 113/93/EP, hep-ph/9311204, 1993.
- [47] W. Press, B. Flannery, S. Teukolsky und W. Vetterling. *Numerical Recipes in C*. Cambridge University Press, 1988.
- [48] L. H. Ryder. *Quantum Field Theory*. Cambridge University Press, 1985.
- [49] R. Slansky. Group theory for unified model building. *Physics Reports*, 79(1):1–128, 1981.
- [50] B. Stroustrup. *The C++ Programming Language*. Addison-Wesley Publishing Company, 1992.
- [51] S. Wolfram. *Mathematica*. Addison-Wesley Publishing Company, 1988.